

# LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MA1101

13.12.07-06

## Oppgave 1

$$a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln(1 + \sin 2x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{\frac{2 \cos 2x}{1 + \sin 2x}} = \frac{-1}{\frac{-2}{1}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1) dt}{x^3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{6x} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

## Oppgave 2

$$a) \int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

$$= \underline{\underline{\ln(x^2-2x+2) - 2 \arctan(x-1) + C}}$$

$$b) \frac{1}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2} = \frac{Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (C-2A)x + 2A}{x(x^2-2x+2)}$$

Sikkert oppfylt når  $A+B=0$   
 $C-2A=C$   
 $2A=1$  }  $\underline{\underline{A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 1}}$

$$c) \int \frac{\cot \theta d\theta}{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 2} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta (\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 2)}$$

$x = \sin \theta$   
 $dx = \cos \theta d\theta$

$$\int \frac{dx}{x(x^2-2x+2)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(x^2-2x+2) + \frac{1}{2} \arctan(x-1) + C$$

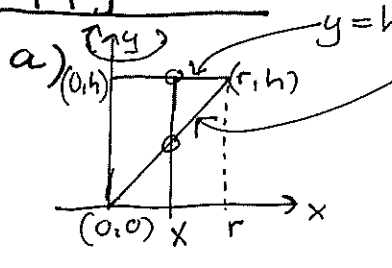
$$= \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2} \arctan(x-1) + C$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot \theta \, d\theta}{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 2} = \left[ \frac{1}{4} \ln \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 2} + \frac{1}{2} \arctan(\sin \theta - 1) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \ln \frac{1/4}{5/4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln 5}}$$

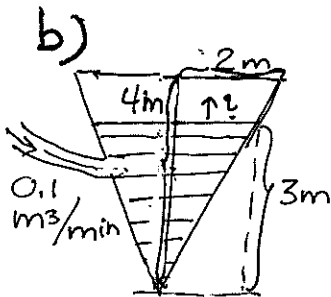
### Oppgave 3

a)   $y = h$   
 $y = \frac{h}{r} x$  Bruker sylindriske skalløyper

$$V = \int_0^r 2\pi x (h - \frac{h}{r} x) dx = \left[ \pi h x^2 - \frac{2\pi h}{3r} x^3 \right]_{x=0}^{x=r} = \underline{\underline{\frac{\pi r^2 h}{3}}}$$

Alternativt f. eks. skivemetoden mhp y-aksen:

$$\int_0^h \pi \left( \frac{r}{h} y \right)^2 dy = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{h^2} y^3 \Big|_{y=0}^{y=h} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \pi r^2 h}}$$



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}, \quad h = 2r \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} h$$

$$V(t) = \frac{\pi}{12} h(t)^3$$

$$V'(t) = \frac{\pi}{4} h^2(t) \cdot h'(t)$$

$$V'(t_0) = 0.1 \text{ m}^3/\text{min}, \quad h(t_0) = 3 \text{ m}. \quad \text{Altså}$$

$$h'(t_0) = \frac{4 V'(t_0)}{\pi h^2(t_0)} = \frac{4 \cdot 0.1}{\pi \cdot 9} = \underline{\underline{\frac{2}{45\pi} \text{ (m/min)}}}}$$

### Oppgave 4

Karakteristiske ligning  $r^2 - 5r - 6 = 0$

$$\text{Røtter } r = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$$

Generell løsning av diff. lign.  $y = C e^{6x} + D e^{-x} \Rightarrow$

Setter inn betingelsene:

$$0 = y(0) = C + D$$

$$4 = y'(0) = 6C - D$$

$$\text{Altså } \underline{\underline{y = \frac{4}{7} e^{6x} - \frac{4}{7} e^{-x}}}}$$

$$y' = 6C e^{6x} - D e^{-x}$$

$$\begin{cases} 7C = 4 \\ D = -C \end{cases} \Leftrightarrow C = \frac{4}{7}, \quad D = -\frac{4}{7}$$

## Oppgave 5

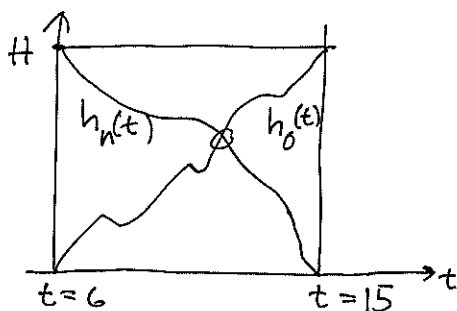
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{sekantsetn.} \\ \text{(middelverdisetn.)}}}{=} \cos c \text{ for passende } c \in (0, x)$$

cosinus er avtagende på  $(0, \pi)$ , så  $\cos c > \cos x$

Tilsammen  $\frac{\sin x}{x} > \cos x$  (for  $x$  vilk. i  $(0, \pi)$ )  $\square$

Alternativt studerer vi f.eks.  $f(x) = \sin x - x \cos x > 0$  for  $x \in (0, \pi)$  ved vanlig drøfting:  $f$  er kont. på  $[0, \pi)$ ,  $f(0) = 0$  og  $f'(x) = (\cos x - \cos x) + x \sin x > 0$  for  $x \in (0, \pi)$ . Vi har at  $f(x)$  er strengt voksende på  $[0, \pi)$ , og spesielt er  $f(x) > f(0)$  når  $x > 0$ .  $\square$

## Oppgave 6



La  $h_o(t)$  betegne høyden ved tiden  $t$  på oppturen og  $h_n(t)$  betegne høyden ved tiden  $t$  på nedturen.

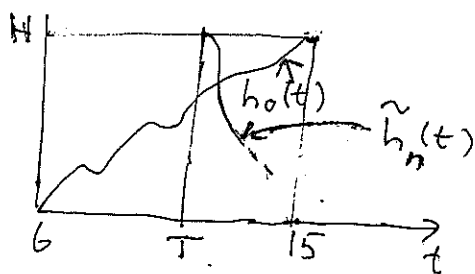
Ser vi på  $d(t) = h_o(t) - h_n(t)$

har vi da en kontinuerlig funksjon der  $d(6) = 0 - H < 0$ ,  $d(15) = H - 0 > 0$ .

Altså må det i flg. skjæringssetningen finnes minst en  $t_0$ ,  $6 < t_0 < 15$ , slik at  $d(t_0) = 0 \Leftrightarrow h_o(t_0) = h_n(t_0)$ .  $\square$

(Startet nedstigningen etter klokka 15, må vi anta at hun er på toppen klokka 15.)

Ser på situasjonen der hun starter kl.  $T$ ,  $6 < T < 15$ ,



$$g: [T, 15] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t) = h_o(t) - \tilde{h}_n(t)$$

$$g(T) = h_o(T) - H \leq 0$$

$$g(15) = h_o(15) - \tilde{h}_n(15) = H - \tilde{h}_n(15) \geq 0$$

Igjen må det finnes  $t = t_1$  slik at  $g(t_1) = 0$  eller  $h_o(t_1) = \tilde{h}_n(t_1)$ .  $\square$