MA1101 aug 13

Med forbehold!
Kari

Oppg. 1

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \underline{\underline{1}}$ evt u/ L. Hôpital

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cdot x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x\cos x} = \underline{\underline{\pm\infty}}$

Oppg. 2

Er (1,1) en løsning? JA

$xy + \sin(\pi y) = 1$ (x i intervall om 1)

$y + xy' + \cos(\pi y)\cdot \pi y' = 0$

$x=1,\ y=1:\quad 1 + y' + (-\pi)y' = 0;\ y' = \frac{-1}{1-\pi} = \underline{\frac{1}{\pi-1}}$

$(y-1) = \frac{1}{\pi-1}(x-1)$

$(\pi-1)y - (\pi-1) = x-1;\ \boxed{(\pi-1)y - x = \pi-2}$

Oppg. 3

$$\begin{array}{l} x^2 : x^2-x-2 = 1 + \dfrac{x+2}{x^2-x-2} \\ \underline{x^2-x-2} \\ \quad x+2 \end{array}$$

$x^2-x-2 = (x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$
$= (x-2)(x+1)$

$\frac{x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1};\ \underline{A = \frac{4}{3},\ B = -\frac{1}{3}}$

$\int \frac{x^2}{x^2-x-2}\,dx = x + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C$

$\int_0^1 \cdots = 1 - \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 2 = \underline{\underline{1 - \frac{5}{3}\ln 2}}$

Oppg. 4

$$y' - 3y = e^{2x}$$

Med integrerende faktor:

$$(e^{-3x}y)' = e^{-3x} \cdot e^{2x} = e^{-x}$$

$$e^{-3x}y = -e^{-x} + C$$

$$y = -e^{2x} + C e^{3x}$$

$y(0) = -1 + C = 3 \Leftrightarrow \underline{C = 4}$ Altså $\underline{\underline{y = 4e^{3x} - e^{2x}}}$

Oppg. 5

$$f(x) = \ln(4 - x^2) + \sqrt{2}\,|x|$$

a) Definisjonsmengden til f er $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 2$

eller $\underline{\underline{(-2, 2) = D}}$

b) $f(x) = g(x) + h(x)$

der $g'(x)$ eksisterer i hele D, mens $h'(x)$ eksisterer i $D \setminus \{0\}$ altså i $\underline{(-2, 0) \cup (0, 2)}$

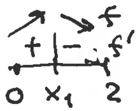
c) $f(-x) = f(x)$, og vi ser på $\underline{0 \leq x < 2}$:

$0 < x < 2$: $f'(x) = \dfrac{-2x}{4 - x^2} + \sqrt{2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2}(4 - x^2)$$

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2}$$

Bare $\underline{x_1 = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{18}}{2}} \in (0, 2)$



Pga symmetri om y-aksen har vi et $\underline{\text{lokalt bunnpunkt for } x = 0}$ og $\underline{\text{lokale toppunkt for } x = \pm x_1}$. Disse er også globale toppunkt. Da $f(x) \to -\infty$ når $x \to \pm 2$ har vi ikke noe globalt bunnpkt.

Oppgave 6

$y = k$ innsatt:

$(x^2+1)\cdot 0 + x k^3 = x$; $k = 1$ er konstant.

Oppgave 7

$$K(v) = 3000\,\frac{1000}{v} + 1000\left(1 + 0.01\, v^{3/2}\right)$$

$$K'(v) = -\frac{3\cdot 10^6}{v^2} + \frac{3}{2}\,10 v^{1/2} = 0$$

$$v^{5/2} = 2\cdot 10^5$$

K $\searrow$ $\nearrow$

K' $-$ $+$

0 v_0

$$v_0 = 2^{2/5}\cdot 10^2 = 100\cdot 2^{2/5}$$

Enkel drøftig gir at denne hastigheten minimerer K.

Oppgave 8

f'' kont. på $[0,1]$, $f(0) = f'(0) = 0$

Skal vise at det fins en konstant A s.a.

$|f(x)| \le A x^2$ for alle $x \in [0,1]$.

Bevis (Lukter sekantsetning på f')

→ La $x \in (0,1]$

Har $\left|\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}\right| = \underset{c\in(0,x)}{|f''(c)|} \le A$ da

f'' kont. på $[0,1]$ (Ekstremalverdisetn.)

Altså $|f'(x)| \le A|x| = A x$ for $0 < x \le 1$

$|f'(0)| \underset{\text{gitt}}{=} 0 = |0|$; $|f'(x)| \le Ax, x \in [0,1]$

$f(0) = 0$ slik at $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$

$\therefore$ $|f(x)| \le \int_0^x |f'(t)| \le \int_0^x A t\, dt = \frac{A}{2} x^2$, $x \in [0,1]$

FRAMME! (Skulle kanskje startet med $|f''(c)| \le M$