Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I GRUNNKURS I ANALYSE I (MA1101/MA6101)

Fredag 21. desember 2012
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Kode D: Bestemt, enkel kalkulator

Sensur: 23. januar 2013

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig frem fra besvarelsen.

Oppgave 1 Finn globale maksimums- og minimumspunkt for $f(x) = xe^x$, $-\infty < x < \infty$, om disse finnes.

f er deriverbar på hele tallinja, så ekstremalpunkt kan kun skje der den deriverte er null (det er ingen endepunkter, og ingen punkt der den deriverte ikke eksisterer). $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$, så $f'(x) = 0$ når $x + 1 = 0$, med andre ord når $x = -1$. $f'(x)$ er negativ for $x < -1$ og positiv for $x > -1$, så dette gir oss et globalt minimum. Dermed har vi: ingen globale maksimumspunkt, og et globalt minimumspunkt i $(-1, -1/e)$.

Oppgave 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{3x^2} = \lim_{u\to 0^+} \frac{e^u}{3u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{e^u}{3} = \frac{1}{3}$$

Her har vi brukt l'Hôpitals regel i første likhet for den første grensen og i første og tredje likhet for den andre grensen. For å finne den deriverte til telleren i den andre grensen har vi brukt analysens fundamentalsetning. (Vi kunne like godt ha hoppet over substitusjonen vi gjorde i den andre grensen, og brukt l'Hôpitals regel direkte.)

Oppgave 3 Her er to løsninger, en med substitusjon, og en med delbrøksoppspalting.

Sett $u = x^2 - 4$. Da er $u' = 2x$, $x^2 = u + 4$ og $x^3 = (u+4)u'/2$, så

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{u+4}{2u}\,du = u/2 + 2\ln|u| + C = \underline{\frac{(x^2-4)}{2} + \ln|x^2-4| + C}$$

Polynomdivisjon gir oss $\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$. Ved delbrøksoppspalting får vi

$$\frac{4x}{x^2-4} = \frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2(A-B)}{x^2-4}$$

så vi må ha $A + B = 4$ og $A - B = 0$, som gir $A = B = 2$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx &= \int x + \tfrac{2}{x-2} + \tfrac{2}{x+2}\,dx = \tfrac{x^2}{2} + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C\\ &= \tfrac{x^2}{2} + 2\ln|x-2|\cdot|x+2| + C = \underline{\tfrac{x^2}{2} + \ln(x^2-4)^2 + C}\end{aligned}$$

(Disse svarene ser forskjellige ut, men er det ikke. Hvorfor?)

Oppgave 4 Vi sier at en funksjon $f(x)$ *er asymptotisk med en funksjon* $g(x)$ (i uendelig) hvis $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Finn et monom $g(x) = cx^n$ slik at funksjonen $f(x) = \frac{x^3+2}{3x+1}$ er asymptotisk med $g(x)$ (i uendelig) eller vis at det ikke er mulig å finne et slikt monom.

Vi ønsker at

$$\frac{\frac{x^3+2}{3x+1}}{cx^n} = \frac{x^3+2}{3cx^{n+1} + cx^n} \to 1 \quad \text{når} \quad x \to \infty$$

Når x er stor vil leddene med høyest grad ha mest å si. I teller er dette x^3 og i nevner er det $3cx^{n+1}$. Skal grensen bli en, bør disse være like. Vi prøver oss derfor med $c = 1/3$ og $n = 2$, med andre ord $g(x) = x^2/3$. Vi må sjekke at denne tilfredsstiller kravet:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+2}{3x+1}}{x^2/3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2}{x^3+\frac{x^2}{3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{3x}}=\frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}}=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

$\underline{g(x)=x^3/3}$ er dermed et monom som er asymptotisk med $f(x)=\frac{x^3+2}{3x+1}$ (i uendelig).

Oppgave 5 Finn en likning som beskriver tangenten til kurven beskrevet av $4x^2+y^2=5$ i punktet $(1/2,2)$

La oss først sjekke at punktet er på kurven: $4\cdot(1/2)^2+2^2=5$ OK.

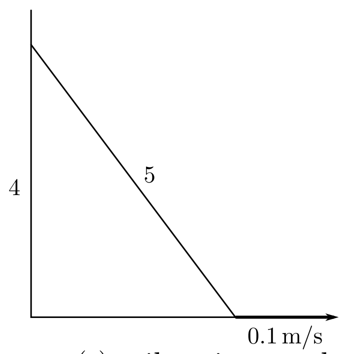
Vi kjenner et punkt tangenten går gjennom, $(1/2,2)$, og trenger i tillegg et stigningstall. Om vi ser på y som en funksjon av x (vi kan gjøre dette lokalt, nær punktet vårt), vil dette stigningstallet være det samme som y' i dette punktet. Deriverer vi hver side av likningen som beskriver kurven med hensyn på x får vi (husk at $y=y(x)$, og bruk kjerneregelen):

$$8x+2yy'=0 \quad \text{eller} \quad y'=-8x/2y=-4x/y$$

I punktet $(1/2,2)$ får vi dermed $y'=-4(1/2)/2=-1$ så tangenten er beskrevet av likningen $\underline{y-2=-1(x-1/2)}$ eller $\underline{y=-x+\frac{5}{2}}$

Oppgave 6

En 5 meter lang stige står opptil en vegg på et flatt underlag. På et gitt tidspunkt er toppen av stigen 4 meter over bakken, og foten av stigen glir bort fra veggen med en fart av 0,1 m/s. Hvor fort beveger toppen av stigen seg på det gitte tidspunktet?



Høyden på veggen, $h=h(t)$ og avstanden fra veggen, $a=a(t)$, vil variere med tiden. Lengden er fast, 5 meter, så vi får

$$a^2(t)+h^2(t)=5^2.$$

Deriverer vi hver side med hensyn på t får vi

$$2a(t)a'(t)+2h(t)h'(t)=0 \quad \text{eller} \quad h'(t)=\frac{-a(t)a'(t)}{h(t)}$$

Ved tidspunktet i oppgaven har vi $h = 4$, så $a = 3$. Vi har også $a' = 0,1$ så $h' = -0{,}075$. Dermed har vi at på det gitte tidspunktet beveger toppen av stigen seg rett nedover med en fart $\underline{0{,}075\,\mathrm{m/s}}$.

Oppgave 7 I denne oppgaven definerer vi $f(x)$ for alle $x > 0$ ved

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

og betegner den inverse funksjonen med $g(x) = f^{-1}(x)$.

a) Vis, ut fra denne definisjonen, at $f(x)$ er en en-entydig (injektiv) funksjon (m.a.o. at f har en invers).

Fra analysens fundamentalsetning vet vi at $f'(x) = 1/x$. Vi har $x > 0$, så $f'(x) > 0$ for alle x i definisjonsmengden. Dermed vet vi at funksjonen er strengt voksende i hele definisjonsmengden. Fra dette kan vi konkludere at f er en-entydig, og har en invers.

b) Ut fra definisjonen som er brukt her, finn $g'(0)$.

Fordi g er den omvendte funksjonen til f har vi $g'(0) = 1/f'(g(0))$. Fra definisjonen til f ser vi at

$$f(1) = \int_1^1 \frac{dx}{x} = 0,$$

så $g(0) = 1$. Vi har også $f'(1) = 1/1 = 1$, så

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{1} = \underline{1}$$

Oppgave 8 La k være et positivt tall, og la R være området i xy-planet begrenset av kurvene $y = x^k$, $y = h$ ($h > 0$) og y-aksen (se figur).

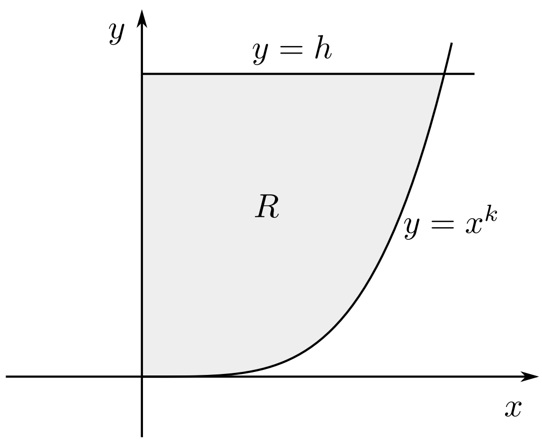
a) Området R roteres om y-aksen. Vis at volumet til rotasjonslegemet er gitt ved $V = V(h) = \pi\frac{1}{1+2/k}h^{1+2/k}$.

Hvis vi deler legemet inn i horisontale skiver med tykkelse Δy vil bunnen i den i-te skiven være en sirkelskive med radius $x_i = y_i^{1/k}$ og dermed areal $\pi x_i^2 = \pi y_i^{2/k}$. Volumet av skiven vil dermed være omtrent $\pi y_i^{2/k}\Delta y$. Legger vi sammen dette for alle skivene, får vi at volumet av legemet er omtrent $\sum_{i=1}^{n} \pi y_i^{2/k}\Delta y$, der n er antallet skiver vi har delt legemet opp i.

Funksjonen $f(y) = \pi y^{2/k}$ er kontinuerlig på $[0, h]$, så vi vet at når vi lar tykkelsen av skivene gå mot null, vil disse summene konvergere mot integralet $\int_0^h \pi y^{2/k}\, dy$. $F(y) = \frac{1}{2/k} y^{1+2/k}$ er en antiderivert til $f(y)$, så vi får

$$V = V(h) = \int_0^h \pi y^{2/k}\, dy = F(h) - F(0) = \pi\frac{1}{1+2/k}h^{1+2/k}$$

b) Rotasjonslegemet fylles med vann til en høyde lik 1. Deretter tappes vannet ut ved å bore et lite hull i bunnen. Vi vet da at vannet vil strømme ut med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av vannhøyden(*). Vi setter proporsjonalitetsfaktoren lik 1 og får dermed at $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{y}$, hvor y er vannhøyden. Det finnes en verdi for eksponenten k som gjør at vannhøyden avtar med konstant hastighet. Finn denne verdien av k. Hvor lang tid tar det før tanken er tom med denne verdien av k? (Svaret vil komme ut som et ubenevnt tall fordi vi har utelatt alle benevninger.)



(*) Dette følger av Torricellis lov fra fysikken.

Vi lar $y = y(t)$ være vannhøyden ved tid t. Fra første del av oppgaven har vi at når vannhøyden er y, er volumet

$$V = V(y) = \pi\frac{1}{1+2/k}y^{1+2/k}. \tag{1}$$

Fra kjerneregelen får vi

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} \tag{2}$$

Fra (1) får vi

$$\frac{dV}{dy} = \pi y^{2/k}. \tag{3}$$

(Dette er $f(y)$ i første del av oppgaven.) I følge oppgaven har vi

$$\frac{dV}{dt} = -\sqrt{y} \tag{4}$$

Setter vi sammen (2), (3) og (4) får vi

$$-\sqrt{y} = \pi y^{2/k}\frac{dy}{dt} \quad \text{eller} \quad \frac{dy}{dt} = -\pi y^{\frac{1}{2}-\frac{2}{k}}. \tag{5}$$

Hvis vannhøyden skal avta med konstant hastighet må $\frac{dy}{dt}$ være konstant, så i følge (5) må $1/2 - 2/k = 0$. Altså må vi ha $\underline{k = 4}$.

Fra dette får vi at i denne situasjonen, der vannhøyden avtar med konstant hastighet, må vi ha $\frac{dy}{dt} = -\pi$. Tanken er tom når $y = 0$. Hvis starthøyden er 1, og $\frac{dy}{dt} = -\pi$, vil tiden det tar før tanken er tom dermed være $\underline{1/\pi}$.