NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I LØSNINGSFORSLAG

Faglig kontakt under eksamen: John Erik Fornæss (Trondheim Spektrum)/Kari Hag (Øvrige)

Tlf: 46419414/48301988

Eksamensdato: 9. desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Svar på oppgavene skrives på oppgavearkene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Kandidatnummer: ....

Oppgave 1 Gitt funksjonen $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

a) Finn alle ekstremalpunktene til f og avgjør hvor f er voksende og hvor f er avtagende.

LF oppgave 1:

$$f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2).$$

Vi ser at $f' > 0$, så f er voksende når $x > 2$ og når $x < 0$. [Alternativt korrekt svar: f er voksende når $x \geq 2$ og når $x \leq 0$.] $f' < 0$ når $0 < x < 2$, så der avtar f. [Alternativt korrekt svar: f avtar når $0 \leq x \leq 2$.] Derfor har f maks punkt når $x = 0$ og da er $y = 1$ så $(x, y) = (0, 1)$. f har minimumspunkt når $x = 2$, så $(x, y) = (2, -1/3)$.

b) Hvor mange nullpunkter har f? (Husk å begrunne.)

$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) = x^2(x/3 - 1) + 1 \to -\infty$$
$$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to \infty.$$

Det følger av skjæringssetningen at f har minst ett nullpunkt i hvert av intervallene $(-\infty, 0), (0, 2), (2, \infty)$. Siden funksjonen er strengt monoton på hvert av intervallene, følger det at f har nøyaktig 3 nullpunkter.

Oppgave 2 La $h(x) = x^3 + 2x + 2$.

Vis at h har en invers funksjon h^{-1} og finn $(h^{-1})'(2)$.

LF oppgave 2:

$$h'(x) = 3x^2 + 2 > 0.$$

Altså er h strengt voksende og har en invers, h^{-1}. Ser at $h(0) = 2$. Altså er

$$(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 3 Området under grafen til $f(x) = \sqrt{x \sin x}$ og over x aksen, $0 \leq x \leq \pi$, bli rotert om x aksen. Finn volumet av omdreiningslegemet.

LF opgave 3:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^\pi \pi(f(x))^2 dx \\
&= \int_0^\pi \pi x \sin x dx \\
&= \pi x(-\cos x)|_0^\pi - \int_0^\pi \pi(-\cos x) dx \\
&= \pi\pi(-(-1)) - 0 + \int_0^\pi \pi \cos x dx \\
&= \pi^2 + \pi \sin x|_0^\pi = \pi^2
\end{aligned}$$

Oppgave 4 Fallskjermhopper Amelia lander vertikalt. En gutt står 300 meter unna landingspunktet. I det fallskjermhopperen er 200 meter over bakken observerer han at avstanden mellom ham og Amelia avtar med 10 meter per sekund. Hva er fallskjermhopperens vertikale hastighet i dette tidspunktet? Du kan anta at bakken er horisontal og at alle målinger foretas ved bakkenivå.

LF oppgave 4

$a^2 = 300^2 + y^2$ der $a = a(t)$ er avstanden mellom gutten og fallskjermhopperen og $y(t)$ er dennes høyde over bakken. $2a(t)a'(t) = 2y(t)y'(t)$. Ved $t = t_0, a(t_0) = \sqrt{13} * 100, a'(t_0) = -10, y(t_0) = 200$.

$$y'(t_0) = -\sqrt{13} * 1000/200 = -5\sqrt{13}[m/s]$$

Oppgave 5 La $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0, x > -1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ Finn $f'(0)$ hvis den eksisterer.

LF oppgave 5

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= [\tfrac{0}{0}] \\ &=_{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} \\ &= [\tfrac{0}{0}] \\ &=_{L'H} \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2(1+x)^2} \\ &= -1/2 \end{aligned}$$

Oppgave 6 Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{(x^2 + x^3 + 1)dx}{x^3(x^2 + 1)}$$

LF oppgave 6

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^2+x^3+1)dx}{x^3(x^2+1)} &= \int \frac{(x^3+x^2+1)dx}{x^3(x^2+1)} \\
&= \int \frac{x^3 dx}{x^3(x^2+1)} + \int \frac{(x^2+1)dx}{x^3(x^2+1)} \\
&= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^3} \\
&= \arctan x - \frac{1}{2x^2} + C
\end{aligned}$$

Oppgave 7 Løs differensialligningen

$$2y' + \frac{1}{\sqrt{x}}y = e^{-\sqrt{x}}, x > 0.$$

LF oppgave 7

$$y' + \frac{1}{2\sqrt{x}}y = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}}, x > 0.$$

Definer $F(x) = \sqrt{x}$. Da er F et ubestemt integral for $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Vi har derfor den generelle løsningen:

$$\begin{aligned}
y &= e^{-F}\left(\int e^F \frac{1}{2}e^{-\sqrt{x}}dx + C\right) \\
&= e^{-\sqrt{x}}(\frac{1}{2}x + C)
\end{aligned}$$

Oppgave 8 Anta at f, f', f'' er kontinuerlige for alle reelle tall x og at $|f''(x)| \leq 2$. Anta også at $f(0) = f'(0) = 1$.

Vis at $|f'(x)| \leq 2|x| + 1$ og at $|f(2)| \leq 7$.

LF oppgave 8

Vi har at

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f'(x) - f'(0)| + |f'(0)| \\ (MVT:) &= |f''(c)||x-0| + 1 \\ &\leq 2|x| + 1 \end{aligned}$$

(Her har vi funnet c ved hjelp av middelverdisetningen, MVT.)

Derfor får vi

$|f(2)| = |\int_0^2 f'(x)dx + f(0)| \leq 1 + |\int_0^2 f'(x)dx| \leq 1 + \int_0^2 (2x+1)dx = 1 + (x^2+x)|_0^2 =$ 7.

Formelark for MA1101/MA6101

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a\ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensligning

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$
$$(r^2 + br + c = 0)$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \neq 0 \\ Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n & \text{hvis to komplekse røtter } r, \overline{r} \end{cases}$$