NTNU
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag til eksamen i MA1101/MA6101 20.12.2013

Oppgave 1a La

$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-1}.$$

Vi har at $f(x) = 0$ når $x^2 - 2 = 0$. Altså har f nullpunktene $x = \pm\sqrt{2}$. Videre er

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2},$$

slik at $f'(x) = 0$ når $x = 0$, og her skifter den deriverte fortegn fra $-$ til $+$. Altså har vi et lokalt ekstremalpunkt i $x = 0$ ($f(0) = 2$). Dette er et lokalt minimum.

Oppgave 1b Vi har at $f(x) = f(-x)$, og det rekker derfor å se på $x \geq 0$. Vi ser at

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty,$$

da $x^2 - 2 \to -1$ og $x^2 - 1 \to 0^-$ når $x \to 1^-$. På samme måte kan man argumentere for at

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty.$$

Videre har vi at

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2/x^2}{1-1/x^2} = 1.$$

Ved symmetri følger det at

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1.$$

Altså har f to vertikale asymptoter, $x = -1$ og $x = 1$, og en horisontal asymptote, $y = 1$. Grafen til f er skissert i Figur 1.

Oppgave 2a Vi skal finne det ubestemte integralet

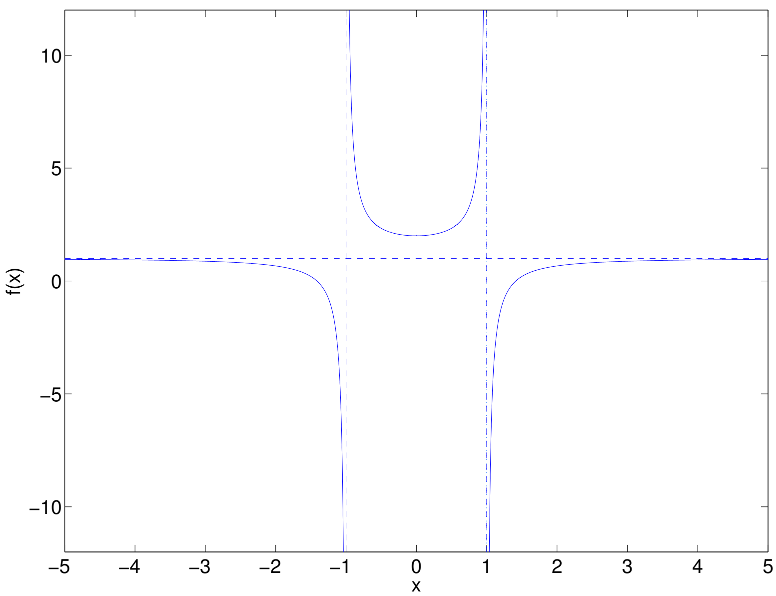
$$I = \int \frac{2}{u(2+u)} du.$$

Vi begynner med å delbrøkoppspalte integranden

$$\frac{2}{u(2+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{2+u},$$

og finner at $A = 1$ og $B = -1$. Altså er

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2+u}\right) du = \ln|u| - \ln|u+2| + C \\ &= \ln\left|\frac{u}{u+2}\right| + C = -\ln\left|1 + \frac{2}{u}\right| + C. \end{aligned}$$



Figur 1: Oppgave 1b: Skisse av f.

Oppgave 2b Vi skal så finne alle løsninger av

$$(2+e^x)\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

Om vi deler begge sider av ligningen på $(2+e^x)$ får vi

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{2+e^x}y=0. \tag{1}$$

Altså er integrerende faktor $e^{\mu(x)}$, hvor

$$\mu(x)=\int\frac{2}{2+e^x}dx$$

Ved substitusjonen $u=e^x$ har vi at

$$\int\frac{2}{2+e^x}dx=\int\frac{2}{u(2+u)}du=-\ln\left|1+\frac{2}{u}\right|+C$$

(hvor vi har brukt resultatet fra forrige deloppgave). Vi velger $C=0$ og får

$$\mu(x)=-\ln\left(1+\frac{2}{e^x}\right)=-\ln\left(1+2e^{-x}\right),$$

hvor vi dropper absoluttverditegnet fordi $1+2e^{-x}>0$ for alle x. Dermed er

$$e^{\mu(x)}=\left(1+2e^{-x}\right)^{-1}.$$

Om vi nå multipliserer begge sider i (1) med den integrerende faktoren $e^{\mu(x)}$ får vi at

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\mu(x)}y\right)=\frac{d}{dx}\left((1+2e^{-x})^{-1}y\right)=0,$$

og følgelig er

$$(1 + 2e^{-x})^{-1} y = C.$$

Altså er alle løsninger av (1) på formen

$$y(x) = C + 2Ce^{-x}. \tag{2}$$

Vi skal nå finne en løsning som oppfyller $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$. Gitt en generell løsning på formen (2) har vi at $\lim_{x\to\infty} y(x) = C$. Løsningen vi er på jakt etter er altså

$$y(x) = 1 + 2e^{-x}.$$

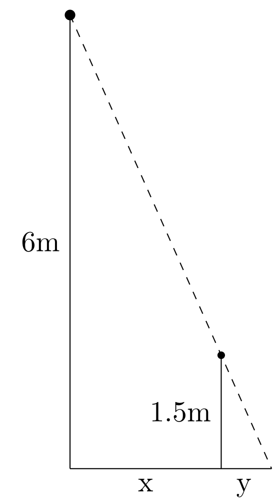
Oppgave 3 Situasjonen er illustrert i Figur 2. Vi har oppgitt at $dx/dt = -1.5$ m/s, og vi vil finne dy/dt. Ved formlikhet har vi at

$$\frac{y}{1.5} = \frac{x+y}{6} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x.$$

Derivasjon med hensyn på t gir

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3} \cdot (-1.5)\text{m/s} = -0.5\text{m/s}.$$

Lengden av skyggen til Pia avtar med 0.5 m/s.



Figur 2: Pia og lyktestolpen

Oppgave 4 Vi finner først volumet av legemet som framkommer når A dreies om y-aksen (merk at dette er en kjegle med radius og høyde lik 1). Vi bruker sylinderskallmetoden, og ser at høyden i hvert sylinderskall er gitt ved $h = 1 - x$ for $0 \leq x \leq 1$. Altså er volumet av omdreiningslegemet

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1-x)dx = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\pi.$$

Dette stemmer godt med formelen vi kjenner for volumet av en kjegle med radius r og høyde h ($V = \pi r^2 h/3$).

Så dreier vi A om linjen $x = 2$. Igjen bruker vi sylinderskallmetoden. For $0 \leq x \leq 1$ har vi at radius er $r = 2 - x$ og høyde er $h = 1 - x$. Dermed blir volumet av omdreiningslegemet

$$V = 2\pi \int_0^1 (2-x)(1-x)dx = 2\pi \left[2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{3}\pi.$$

Oppgave 5a Vi kjenner igjen

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi}{n} \sin\left(1 + \frac{2\pi i}{n}\right)$$

som grensen (når $n \to \infty$) av en Riemannsum for $f(x) = \sin(1 + x)$ på intervallet $[0, 2\pi]$. Altså er

$$L = \int_0^{2\pi} \sin(1 + x)dx = 0.$$

Oppgave 5b Vi vil vise at for enhver $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x + 1) - 4| < \epsilon. \tag{3}$$

Vi har at

$$|(3x + 1) - 4| = |3x - 3| = 3|x - 1|. \tag{4}$$

Altså er (3) oppfylt om vi velger $\delta = \epsilon/3$.

Oppgave 6 Vi vil vise at funksjonen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig i $x = 0$. Altså må vi vise at $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 1$. Vi har at

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2}dt = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = 1,$$

(hvor vi har brukt l'Hospitals regel og Analysens fundamentalteorem). Dette viser at g er kontinuerlig i $x = 0$.

For å avgjøre om g er deriverbar i $x = 0$ må vi se på definisjonen av den deriverte. Dersom $g'(0)$ eksisterer, så er

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1/h) \cdot \int_0^h e^{-t^2}dt - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h e^{-t^2} - h}{h^2}.$$

Dette er et 0/0-uttrykk. Altså kan vi bruke l'Hospitals regel (og Fundamentalteoremet), og finner at

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h^2} - 1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2he^{-h^2}}{2} = 0$$

(hvor vi har brukt l'Hospitals regel to ganger). Dette viser at g er deriverbar i $x = 0$ og at $g'(0) = 0$.

Oppgave 7 Merk: Her presenterer vi en mulig løsning. Alle (korrekte) moteksempler er fullgode svar.

i) La $[a,b] = [-1,1]$, og la f være den kontinuerlige funksjonen $f(x) = |x|$. Da finnes ingen $c \in (-1,1)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

ii) La $[a,b] = [0,1]$, og la f være funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 - x & \text{for } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Vi har at $f'(x) = -1$ for alle $x \in (0,1)$. Altså er f deriverbar på det åpne intervallet $(0,1)$, men det finnes ingen $c \in (0,1)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0-0}{1} = 0.$$