Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt: Marius Irgens
Telefon: 73550228

Eksamen i fag MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I

Bokmål
Fredag 20.mai 2011
Kl. 09.00-13.00
Sensur faller 10.06 2011

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X
Vedlagte formelark for MA1101/MA6101
Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Oppgave 1 Gitt funksjonen $f(x) = x^3e^{-x} + 2$.

a) Finn $f'(x)$. Avgjør hvor f er voksende og hvor den er avtagende og finn eventuelle ekstremalpunkt.

b) Finn eventuelle vendepunkt for f. Avgjør om f har noen vertikale eller horisontale asymptoter.

c) Hvor mange nullpunkt har f? (Husk å begrunne!) Tegn en skisse av grafen til f.

Oppgave 2 Avgjør om grenseverdiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{2x+1}$$

eksisterer.

Oppgave 3 Beregn volumet som fremkommer når vi roterer området avgrenset av $y = 0$ og $y = \sin x$ for $0 \leq x \leq \pi$ om y-aksen.

Oppgave 4 Beregn integralet

$$\int \frac{x^3 + x^2 - 5x - 15}{x^2 - 9}\, dx$$

Oppgave 5 Finn den generelle løsningen av differensiallikningen $e^{-x}y\,' = 1 + y^2$.

Oppgave 6 En tank inneholder 200 liter vann. Ved tidspunkt $t = 0$ begynner en saltoppløsning som inneholder $0,25$ kg salt per liter å strømme inn i tanken med en hastighet av 2 liter per minutt. Vi antar at væskene blander seg raskt. Etter $t = 3$ minutter begynner blandingen å strømme ut av tanken med 2 liter per minutt, slik at væskemengden i tanken nå holder seg konstant.

Forklar hvordan dette leder fram til differensiallikningen

$$y'(t) = 0,5 - \frac{y(t)}{103},$$

hvor $y(t)$ betegner antall kilo salt i tanken ved tiden t, $t > 3$.

Hvor mye salt er det i tanken når $t = 25$ min.? Hvordan går det med saltinnholdet i tanken, $y(t)$, når $t \to \infty$?

Oppgave 7 I denne oppgaven skal du vise Analysens fundamentalteorem, del 1, og kan derfor *ikke* gjøre bruk av fundamentalteoremet.

La f være en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$. Definer

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

for $a \leq x \leq b$. Vis at F er deriverbar på (a, b) ved å vise at $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$.

Du kan uten bevis gjøre bruk av følgende resultat (middelverdisetningen for integral): Hvis g er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$, så finnes et tall $c \in [a, b]$ slik at $\int_a^b g(t)\, dt = g(c) \cdot (b - a)$.

Hint: Bruk definisjonen av den deriverte.