Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen: Per Hag, telefon 73591743

KONTINUASJONSEKSAMEN I MA1101/MA6101 GRUNNKURS I ANALYSE I

Nynorsk
09. august 2012
Tid: 09.00 – 13:00
Hjelpemiddel: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X
Vedlagt formelark for MA1101/MA6101

Sensur: 30. august 2012

Oppgåvesettet har 10 punkter som vil bli vektlagt likt ved evalueringen.

Oppgåve 1

Løys initialverdiproblemet:

$$y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5.$$

Oppgåve 2

Finn følgjande grenseverdier:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^2}$$

Oppgåve 3

Finn likninga for tangenten til kurva:

$$x^3 y + 2xy^3 = 3$$

i punktet (1.1).

Oppgåve 4

Eit fly beveger seg rettlinja i konstant høgde 4 km over bakken med ein konstant fart på 600 km/time. Avstanden frå flyet til eit radio-fyr på bakken i punktet B er $d = d(t)$ der t er tid i timer. Finn $d'(t)$ i den augneblinken flyet har beveget seg 3 km frå punktet C som ligg vertikalt over radio-fyret i B. (Det er oppgjeve at flyet har beveget seg gjennom punktet C.)

Oppgåve 5

a) Rekn ut integralet:

$$\int \frac{dx}{4 - x^2}$$

b) Finn arealet som er avgrensa av

$$y = e^{-x} \sin x \quad \text{og} \quad y = 0,$$

mellom $x = 0$ og $x = \pi$.

c) Rekn ut integralet:

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + 3}\, dx.$$

Oppgåve 6

a) Funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er gjeven ved:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{for} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{for} \quad x = 0 \end{cases}$$

Grunngjev at f er kontinuerleg for alle $x \in \mathbf{R}$. Finn $f'(x)$ for $x \neq 0$.

b) Nytt definisjonen av den deriverte til å finna $f'(0)$ for funksjonen i a). Vis og at $\lim_{x \to 0} f'(x)$ ikkje eksisterar.

Ⓐ

Løsninger:

OPPGAVE 1:

Den algebraiske ligning blir:

$$r^2 + 5r + 4 = 0$$

$r = -1$, $r = -4$ er röttene: $(r+1)(r+4) = r^2+5r+4$.

Allmenn lösning:

$$y_A = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x}$$

$$y_A' = -C_1 e^{-x} - 4C_2 e^{-4x}.$$

Begynnelses-betingelsene gir:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 2 \\ y'(0) &= -C_1 - 4C_2 = -5 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = C_2 = 1$$

Lösningen blir:

$$\underline{y = e^{-x} + e^{-4x}}$$

OPPGAVE 5:

(a)
$$\frac{1}{4-x^2} \equiv \frac{1}{(2-x)(2+x)} \equiv \frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x}$$

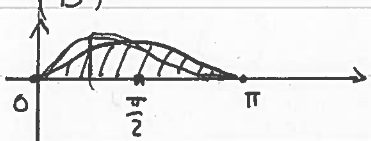
$$\equiv \frac{2A + Ax + 2B - Bx}{4-x^2}.$$ Altså: $2A + 2B = 1$, $A - B = 0$

$$A = B = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{dx}{4-x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{2-x} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{2+x}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2-x| + \frac{1}{4}\ln|2+x| + C = \underline{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C}$$

(b)



Arealet blir:

$$A = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx.$$

$$I = \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\cos dx = -e^{-x}\sin x$$

$$+ (-e^{-x}\cos x + \int e^{-x}(-\sin x)\,dx$$

B

$$2I = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x + K$$

$$I = -\tfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + K/2$$

$$A = -\tfrac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = +\tfrac{1}{2}e^{-\pi} + \tfrac{1}{2}e^{-0}\cdot 1 = \underline{\tfrac{1}{2}(e^{-\pi}+1)}$$

(c) $\int x^3\sqrt{x^2+3}\,dx$

Vi substituerer: $u = x^2+3$; $du = 2x\,dx$

$$\int x^3\sqrt{x^2+3}\,dx = \tfrac{1}{2}\int x^2(x^2+3)^{1/2}\cdot 2x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u-3)u^{1/2}\,du = \tfrac{1}{2}\int (u^{3/2} - 3u^{1/2})\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{5}u^{5/2} - 3\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right] + C = \tfrac{1}{5}u^{5/2} - u^{3/2} + C$$

$$= \underline{\tfrac{1}{5}(x^2+3)^{5/2} - (x^2+3)^{3/2} + C}$$

OPPGAVE 2:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = \underline{1}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{2x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{2x}\right)$$

$= 1\cdot 0 = \underline{0}$, siden $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ og $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$

OPPGAVE 3:

Implisitt derivasjon gir:

$$3x^2y + x^3y' + 2y^3 + 2x\cdot 3y^2\cdot y' = 0$$

Innsettes $x=1$, $y=1$, får vi:

$$3 + y' + 2 + 6y' = 0$$

som gir $7y' = -5$ $\quad y' = -\frac{5}{7}$

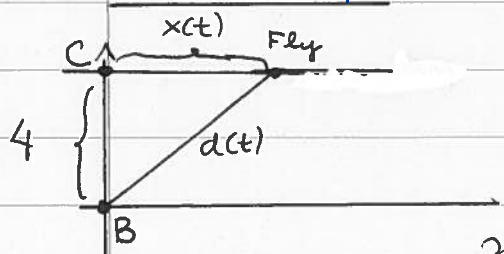
Tangentligningen i $(1,1)$ blir derfor:

$$y - 1 = -\tfrac{5}{7}(x-1) \quad \text{eller}$$

$$\underline{5x + 7y - 12 = 0}$$

(C)

OPPGAVE 4:



Vi har alltid:

$$4^2 + x(t)^2 = d(t)^2$$

Implisitt derivasjon gir:

$$\cancel{2}x(t)\cdot x'(t) = \cancel{2}d(t)d'(t)$$

Vi har at $x'(t) \equiv 600$ k/t og $x(t_0) = 3$ km. Vi har dermed:

$$d'(t_0) = \frac{x(t_0)\cdot x'(t_0)}{d(t_0)}$$

Når $x(t_0) = 3$, har vi

$$4^2 + x(t_0)^2 = d(t_0), \text{ eller}$$

$$d(t_0) = \sqrt{16 + x_0(t)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

Altså:

$$d'(t_0) = \frac{3\cdot 600}{5} = \underline{360 \text{ k/t}}$$

OPPGAVE 6:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

siden $|\sin\frac{1}{x}| < 1$ og $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

For $x \neq 0$ er $f(x)$ produktet av $y = x^2$ og $y = \sin\frac{1}{x}$ som begge er kontinuerlige. Altså er f også kontinuerlig for $x \neq 0$.

For $x \neq 0$ har vi:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$$

(b) $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)$ som ikke eksisterer siden $\cos\frac{1}{x_n} = \begin{cases} 0 & \text{når } x = \frac{2}{n\pi} \\ (-1)^n & \text{når } x = \frac{1}{n\pi}\end{cases}$

<u>Altså: $\lim_{x\to 0} f'(x)$ eksisterer ikke.</u>