Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I**

Faglig kontakt under eksamen: Torkil Stai, Per Hag
Tlf: 47638459, 73591743

Eksamensdato: 20. desember 2013
Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangmåten framgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}.$$

a) Finn nullpunktene til f. Finn $f'(x)$ og angi et lokalt ekstremalpunkt for f.

b) Finn horisontale og vertikale asymptoter for f, og skisser grafen.

Oppgave 2

a) Finn det ubestemte integralet

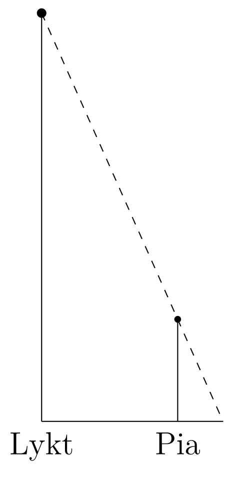
$$\int \frac{2}{u(2+u)} du$$

b) Finn alle løsninger av differensialligningen

$$(2 + e^x)\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Finn en løsning $y(x)$ som oppfyller $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

Oppgave 3 Pia er 1.50 meter høy og går rett mot en lyktestolpe som er 6 meter høy (se figur 1). Hun går med en fart av 1.5 m/s. Hvor fort avtar lengden av skyggen hennes?



Figur 1: Pia og lyktestolpen

Oppgave 4 La A være en trekant med hjørner i punktene $(0,1)$, $(0,0)$ og $(1,0)$. Finn først volumet av legemet som fremkommer når A dreies om y-aksen. Finn deretter volumet av legemet som fremkommer når A dreies om linja $x = 2$.

Oppgave 5

a) Finn grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi}{n} \sin\left(1 + \frac{2\pi i}{n}\right)$$

b) Vis ved et $\epsilon - \delta$-argument at

$$\lim_{x\to 1}(3x + 1) = 4.$$

Oppgave 6 La

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$$

Vis at g er kontinuerlig for $x = 0$. Er g deriverbar i $x = 0$?

Oppgave 7 Vis (ved moteksempel) at følgende to utsagn ikke er sanne:

i) La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig på $[a,b]$. Da finnes et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

ii) La $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ være deriverbar på (a,b). Da finnes et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Formelark for MA1101/MA6101

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensligning

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$
$$(r^2 + br + c = 0)$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \neq 0 \\ Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n & \text{hvis to komplekse røtter } r, \overline{r} \end{cases}$$