Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Marius Irgens (41 39 82 99)

EKSAMEN I GRUNNKURS I ANALYSE I (MA1101/MA6101)

Bokmål
Fredag 21. desember 2012
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Kode D: Bestemt, enkel kalkulator

Oppgavesettet har 3 sider, etterfulgt av et formelark.

Sensur: 23. januar 2013

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten kommer tydelig frem fra besvarelsen.

Oppgave 1 Finn globale maksimums- og minimumspunkt for $f(x) = xe^x$, $-\infty < x < \infty$, om disse finnes.

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene

$$(i)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} \qquad\qquad (ii)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2}\,dt - x}{x^3}$$

Oppgave 3 Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx.$$

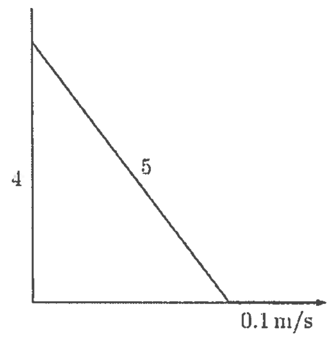
Oppgave 4 Vi sier at en funksjon $f(x)$ *er asymptotisk med en funksjon* $g(x)$ (i uendelig) hvis $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Finn et monom $g(x) = cx^n$ slik at funksjonen $f(x) = \frac{x^3+2}{3x+1}$ er asymptotisk med $g(x)$ (i uendelig) eller vis at det ikke er mulig å finne et slikt monom.

Oppgave 5 Finn en likning som beskriver tangenten til kurven beskrevet av $4x^2 + y^2 = 5$ i punktet $(1/2, 2)$

Oppgave 6

En 5 meter lang stige står opptil en vegg på et flatt underlag. På et gitt tidspunkt er toppen av stigen 4 meter over bakken, og foten av stigen glir bort fra veggen med en fart av 0,1 m/s. Hvor fort beveger toppen av stigen seg på det gitte tidspunktet?



Oppgave 7 I denne oppgaven definerer vi $f(x)$ for alle $x > 0$ ved

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

og betegner den inverse funksjonen med $g(x) = f^{-1}(x)$.

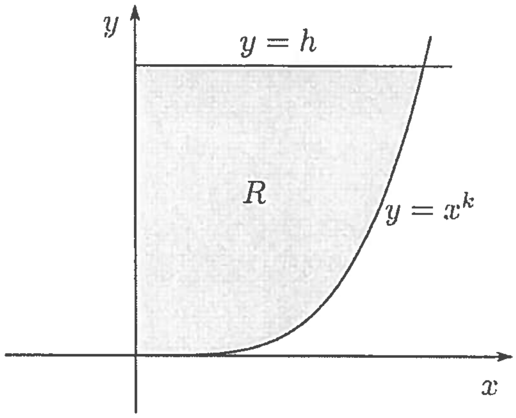
a) Vis, ut fra denne definisjonen, at $f(x)$ er en en-entydig (injektiv) funksjon (m.a.o. at f har en invers).

b) Ut fra definisjonen som er brukt her, finn $g'(0)$.

Oppgave 8 La k være et positivt tall, og la R være området i xy-planet begrenset av kurvene $y = x^k$, $y = h$ ($h > 0$) og y-aksen (se figur).

a) Området R roteres om y-aksen. Vis at volumet til rotasjonslegemet er gitt ved $V = V(h) = \pi \frac{1}{1+2/k} h^{1+2/k}$.

b) Rotasjonslegemet fylles med vann til en høyde lik 1. Deretter tappes vannet ut ved å bore et lite hull i bunnen. Vi vet da at vannet vil strømme ut med en hastighet som er proporsjonal med kvadratroten av vannhøyden(*). Vi setter proporsjonalitetsfaktoren lik 1 og får dermed at $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{y}$, hvor y er vannhøyden. Det finnes en verdi for eksponenten k som gjør at vannhøyden avtar med konstant hastighet. Finn denne verdien av k. Hvor lang tid tar det før tanken er tom med denne verdien av k? (Svaret vil komme ut som et ubenevnt tall fordi vi har utelatt alle benevninger.)



(*) Dette følger av Torricellis lov fra fysikken.

FORMELARK FOR MA1101/MA6101

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$

Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensialligning

$$y'' + py' + qy = 0 :$$

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax}\cos(bx) + De^{ax}\sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$