

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1101 Grunnkurs i analyse I**

Faglig kontakt under eksamen: Kari Hag

Tlf: 483 01 988

Eksamensdato: 4. august 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00-13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten framgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato

Sign

Oppgave 1 La

$$f(x) = e^x \sin x, \quad x > 0.$$

a) Vis at

$$f'(x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) Finn funksjonens lokale maksimums- og minimumspunkter. Skisser grafen.

Oppgave 2 Løs differensialligningen

$$y' - \frac{2}{x}y = x^3$$

på intervallet $(0, \infty)$.

Oppgave 3 La $f(x) = 2e^{-2x} + e^{-x} + 1$. Vis at f har en omvendt funksjon f^{-1} med definisjonsmengde $D_{f^{-1}} = (1, \infty)$. Finn den deriverte $(f^{-1})'(4)$.

Oppgave 4 Beregn grensene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x.$$

Oppgave 5 Beregn de ubestemte integralene:

a)

$$\int e^x \cos x \, dx$$

b)

$$\int \arctan(x + 1) \, dx$$

Oppgave 6 Maksimumsmål for postsending av en rull (en sylinder) er:

- Lengde kan ikke overskride 80 cm.
- Lengde + dobbel diameter kan ikke overskride 102 cm.

Hva er lengden til den største rullen (målt i volum) som kan sendes med posten?

Oppgave 7 La A være området over x -aksen og under grafen til $f(x) = 1/x$, $1 \leq x < \infty$. Vis at arealet til A er uendelig, men at det volumet vi får om vi dreier A rundt x -aksen, er endelig.

Oppgave 8 La

$$f(x) = \begin{cases} 5x \sin \frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

Vis ved et ϵ - δ -argument at f er kontinuert i $x = 0$. Er f deriverbar i $x = 0$?

Formelark for MA1101/MA6101

Ekspontialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
 $\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
 $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
 $\sin x = \pm \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ $\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

| | | | | | |
|----------|---|--------------|--------------|--------------|---------|
| v | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
| $\sin v$ | 0 | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\cos v$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| $\tan v$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Annenordens differensligning

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$
$$(r^2 + br + c = 0)$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle r\u00f8tter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis \u00e9n reell rot } r \neq 0 \\ Cr^n + \bar{C}\bar{r}^n & \text{hvis to komplekse r\u00f8tter } r, \bar{r} \end{cases}$$