2. Forklar hvordan du kan bruke aritmetikkens fundamentalteorem til å vise at $11 \cdot 17 \cdot 19 \neq 81 \cdot 43$ uten å regne ut.

1.1

3. Skriv summene uten summetegn og regn ut verdiene

a) $\sum_{n=1}^{6} 2^n$ b) $\sum_{k=1}^{5} (3k-2)$ c) $\sum_{n=0}^{5} \frac{2}{n+1}$ d) $\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} 2^{i+j}\right)$

4. Er disse likhetene riktige?

a) $\sum_{i=0}^{3} 2^i = 15$ b) $\sum_{i=2}^{7}(2i-1) = \sum_{i=1}^{6}(2i+1)$

c) $\sum_{n=0}^{4} a^n b^{3-n} = \sum_{m=-1}^{3} a^{3-m} b^m$

5. Skriv summene ved hjelp av summetegn

a) $1+2+3+4+5$ b) $5+7+9+11+13$

c) $4+8+12+16+\cdots+64$ d) $1+2+4+8+16+\cdots+128$

e) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}$

6. Fyll inn boksene:

a) $\sum_{k=0}^{8}(2k+3) = \sum_{n=1}^{9} \boxed{}$ b) $\sum_{n=-2}^{4}(n+2)3^n = \sum_{k=0}^{6} \boxed{}$

c) $\sum_{n=0}^{10} x^n y^{1-n} = \sum_{n=1}^{11} \boxed{}$

Oppgaver til seksjon 1.5

1. Utfør polynomdivisjon $P(x) : Q(x)$ og kontroller svaret:

a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 4$, $Q(x) = x - 3$

b) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 1$

2. Regn ut integralene:

a) $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1}\,dx$ b) $\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$

3. Vis at $x = 1$ er en rot i polynomet $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$. Finn de andre røttene.

Oppgaver til seksjon 1.2

1. Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Vis ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

4. Vis at $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

5. Vis at $n^5 - n$ er delelig med 5 for alle naturlige tall n.

10. a) Regn ut $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, 1+3+5+7+9$. Lag en hypotese om summen av de n første oddetallene.

1.2 b) Bevis hypotesen din.

11. La $f(x) = e^{x^2}$. Vis ved induksjon at $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{x^2}$ der $p_n(x)$ er et n-te grads polynom. ($f^{(n)}(x)$ er den n-te deriverte til $f(x)$. Du behøver ikke finne en formel for $p_n(x)$.)

9. Bevis setning 1.5.2. (Hint: Tenk deg at divisoren $Q(x)$ er et vilkårlig polynom som du holder fast under hele beviset, og bruk induksjon på graden til dividenden $P(x)$. Tenk på hva som egentlig skjer i det første skrittet i metoden for polynomdivisjon.)

1.5

Fra Tom Lindstrøm
Kalkulus 3. utg.