$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ bestemmes så ved innsetting:

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \alpha(n+1)^4 + \beta(n+1)^3 + \gamma(n+1)^2 + \delta(n+1) \\ &\quad - \alpha n^4 - \beta n^3 - \gamma n^2 - \delta n \\ &= \alpha(4n^3+6n^2+4n+1) + \beta(3n^2+3n+1) + \gamma(2n+1) + \delta \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 . \end{aligned}$$

Dette gir:

$4\alpha = 1$, $6\alpha + 3\beta = 3$, $4\alpha + 3\beta + 2\gamma = 3$,

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

Altså: $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = 1 - 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$2\gamma = 3 - 4\alpha - 3\beta = 3 - 1 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{1}{4}$

$\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0$

Altså har vi: (løsning av homogen ligning)

$$s_n = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + C$$

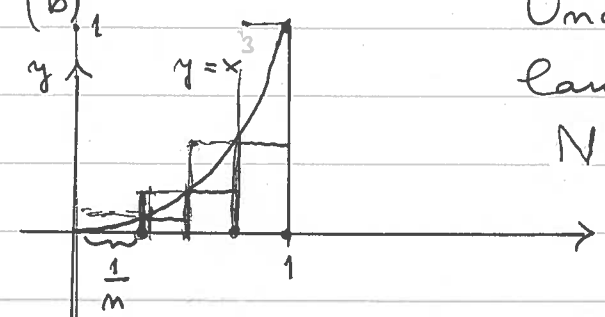
Siden $s_1 = 1$, får vi spesielt:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + C = 1 + C \quad \therefore \quad C = 0.$$

Altså:

$$\underline{s_n = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2}$$

(b)



Undersum med n like lange intervaller:

$$N(\Pi) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^3}{n^3}\right) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \frac{1}{4n^4}(n-1)^2 n^2 .$$

Oversum for samme partisjon:

$$\varnothing(\Pi) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^3}{n^3}\right) = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \frac{1}{4n^4} n^2 (n+1)^2 .$$

Arealet under grafen betegnes A:

$$\frac{1}{4}\frac{(n-1)^2 n^2}{n^4} < A < \frac{1}{4}\frac{n^2(n+1)^2}{n^4}$$

eller $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 < A < \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

Siden disse ulikheter holder for alle n, må vi ha:

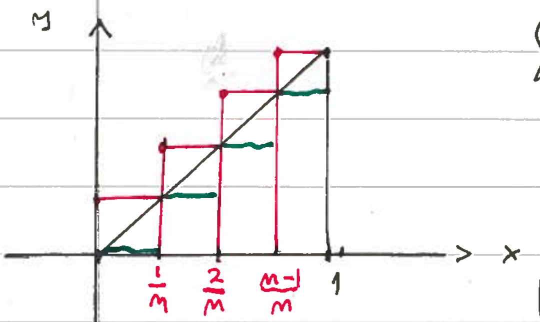
$$A = \frac{1}{4}$$

8.2 Oppgave 5, s. 371.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x) = x$.

$\Pi_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$

(a) Vi skal bestemme $Ø(\Pi_n)$ og $N(\Pi_n)$



$$Ø(\Pi_n) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} + \frac{n}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[1 + 2 + \dots + (n-1) + n\right]$$

$$\overset{Øv.1}{=} \frac{1}{n^2}\,\frac{(n+1)}{2}\cdot n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$N(\Pi_n) = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots \frac{n-1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[1 + 2 + \dots + (n-1)\right] = \frac{1}{n^2}\,\frac{\quad}{2}\cdot(n-1) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

(b) $$\overline{\int_0^1} x\,dx = \inf_{\Pi \text{ partisjon}} Ø(\Pi) \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\int_0^1} x\,dx = \sup_{\Pi \text{ partisjon}} N(\Pi) \ge \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

(c) Siden $\overline{\int_0^1} x\,dx \le \frac{1}{2} \le \underline{\int_0^1} x\,dx$ og vi alltid har

$$\overline{\int_0^1} x\,dx \ge \underline{\int_0^1} x\,dx,$$

har vi at: $\overline{\int_0^1} x\,dx = \underline{\int_0^1} x\,dx$, d.v.s. $y = x$ er integrerbar, og $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

ØVING 9 (22/10 - 23/10 - 2011)

VIKTIGE KOMMENTARER TIL BESVARELSENE.

7.5 **Oppg. 3c, s.339**

Vi skal bestemme

$$\lim_{x\to 0+} (\cot x)^x$$

Vanlig feil er å hevde at $a^0 = 1$ for ethvert a og derfor må:

$$\lim_{x\to 0+}(\cot x)^x = (\cot x)^0 = 1$$

Men problemet her er jo at $\cot x$ ikke er en konstant, så dette resonnement holder ikke! Det ville være like naturlig å hevde at $\lim_{x\to 0+}(\cot x)^x = \infty^x = \infty$.

RIKTIG FRAMGANGSMÅTE:

$$\lim_{x\to 0+}(\cot x)^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(\cot x)} = e^{\lim_{x\to 0+}(x\ln(\cot x))}$$

NB! ($t \to e^t$ er kont)

Vi må da bestemme:

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(\cot x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\cot x)}{1/x} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}}{-1/x^2} = \left(\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\cot x}\right)\left(\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0+}\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 0\cdot 1^2 = 0$$

Altså har vi $\underline{\lim_{x\to 0+}(\cot x)^x} = e^0 = \underline{1}$

7.6 **Oppg. 8, s.344-345**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{1+x^2} & \text{for } x \geq 0 \\ Ae^x + B & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

(a) Vi skal bestemme A og B slik at f er kontinuerlig og deriverbar for alle x.

Dette betyr at A og B må bestemmes slik at $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$
og slik at
$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

Ut fra definisjonen er det klart at
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$
Vi må da ha:
$$\lim_{x\to 0-} (Ae^x + B) = A + B = 0.$$
Videre har vi:
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)} = 1 \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\arctan x}{x}$$
$$= \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{(1+x^2)\cdot 1} \right) = \underline{1}.$$ Vi må derfor ha
$$\underline{1} = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{Ae^x + B}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad (\text{siden } A+B=0)$$
$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{Ae^x}{1} = \underline{A}$$
$A = 1$ gir $B = -1$ siden $A + B = 0$

ALTERNATIV METODE:

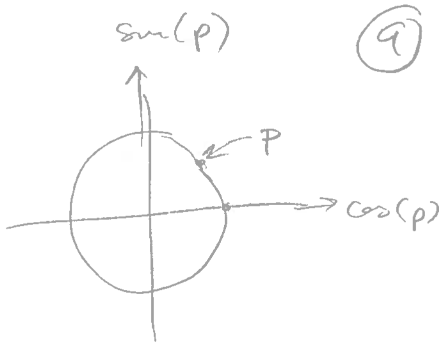
Man regner ut $f'(x)$ for $x > 0$ og får:
$$f'(x) = \frac{1 - 2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$$
Deretter bestemmes:
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = 1.$$

SPØRSMÅL:

Kan vi stole på at
$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad ?$$

NB! L'Hôpitals regel, s. 270, sier at dette holder <u>dersom</u> $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ <u>eksisterer</u> !!

Note:



Oppgave 7.5.3 c):

- $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(\cot(x)) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$.

Vi har $\lim_{x \to 0^+} \cos(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^+} \sin(x) = 0$, så

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{"0"} = \infty.$$

$\ln("\infty") = "\infty"$. Vi har altså et uttrykk på formen $"0" \cdot "\infty"$.

- $e^{(\ln(x))} = x$, altså kan vi anvende dette trick og fortsatt få samme verdi.

MA1101, ØVING 10, LØSNING

Mandag 29/10 – Tirsdag 30/10 – 2012

8.3 **Oppgave 1, s 382.**

(b) Vi skal regne ut:

$$\int_0^2 2x^3\,dx$$

ved å finne antiderivert til integranden.

Vi har: $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$, og dermed

$$\int_0^2 2x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^4\right]_{x=0}^{x=2} = \tfrac{1}{2}\cdot 16 = \underline{8}$$

(f) $$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_{x=1}^{x=\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \underline{\frac{\pi}{12}}$$

(h) $$\int_1^9 \left(\sqrt{x}\right)^3 dx = \int_1^9 x^{\frac{3}{2}}dx = \left[\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^9 = \tfrac{2}{5}(243-1) = \underline{\frac{484}{5}}$$

Oppgave 5, s. 383

(a) Vi skal derivere funksjonen:

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$$

$$\underline{f'(x) = e^{-x^2}}$$

(b) $$f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}dt, \quad \underline{f'(x) = \frac{\sin x}{x}}$$

(c) $$f(x) = \int_1^x \arctan t^2\,dt, \quad \underline{f'(x) = \arctan x^2}$$

Oppgave 6, s. 383

(a) Vi antar at f er kontinuerlig og g deriverbar.

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt. \quad \text{Setter } u = g(x).$$

og $F(u) = \int_a^u f(t)\,dt$, $F'(u) = f(u)$

②

$G(x) = F(f(x))$

Kjerneregelen gir da:

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{du}\int_0^u f(t)\,dt \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= f(u)\cdot g'(x) = \underline{f(g(x))\cdot g'(x)}$$

(b)

Vi skal derivere:

(i) $$\int_0^{\sin x} te^{-t}dt$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sin x} te^{-t}dt = \sin x\, e^{-\sin x}\cdot\cos x$$
$$= \underline{e^{-\sin x}\sin x\cos x}$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt = e^{-x}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}} \quad (x>0)$$

(iii) $$\int_{\sin x}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x = \underline{-1}$$

ALT. METODE: $-\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\left[\arcsin t\right]_0^{\sin x} = \underline{-x}$; $\frac{d}{dx}(-x) = \underline{-1}$

Oppg. 7, s. 383

Vi skal bestemme grenseverdiene:

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{x} \overset{*}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{1} = \underline{1}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_1^x e^{1/t}dt}{x^2} \overset{**}{=} \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}}{2x} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = \underline{0}$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt}{\int_0^{x} te^{\sqrt{t}}dt} \overset{***}{=} \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x}\,e^{\sqrt{x}}} \quad (x>0)$$

Trykkfeil i eldre versjon av TL.

Skal vært "x" i flg. bokas trykkfeil-liste.

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{2}{e^{\sqrt{x}}}\right) = 1\cdot\frac{2}{1} = \underline{2}$$

NB! Ytterligere begrunnelse på neste side!

(a) * Her bör man begrunne at $\lim_{x \to 0+} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$.
Vi observerer at $e^{-t^2} < 1$ og siden $x \to 0$ betyr at intervallet $[0, x]$ er av lengde x, som går mot 0, er saken klar:

$$0 < \left| \int_0^x e^{-t^2} dt \right| < \int_0^x dt.$$

Det tilsvarende argument viser at
$\lim_{x \to 0-} \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$.

(b) ** Her må vi bevise at $\lim_{x \to \infty} \int_1^x e^{1/t} dt = \infty$
Vi observerer her at:
$e^{1/t} > 1$ siden $1/t > 0$. Dette gir

$$\int_1^x e^{1/t} dt > \int_1^x dt = (x-1) \longrightarrow \infty \text{ når } x \to \infty.$$

(c) *** Må bevise at både teller og nevner $\to 0$ når $x \to 0$. Vi vet at:
$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Altså kan vi velge x s.a. $\left| \frac{\sin t}{t} \right| < 2$ når $0 < t \leq x$.
Altså må

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt = 0.$$

Videre er

$$0 < t e^{\sqrt{t}} < e \text{ når } 0 < t < 1.$$ Altså

må:

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^x t e^{\sqrt{t}} dt = 0$$

Samme argument gjelder når vi ser på $\lim_{t \to 0-}$.

4

8.4 Oppg 2, s. 388

(a) Vi skal bestemme:

$$\int \frac{42}{\sin^2(7x)}\,dx$$

Vi setter $u = 7x$ og får $du = 7\,dx$

Altså:

$$\int \frac{6 \cdot 7\,dx}{\sin^2(7x)} = 6\int \frac{du}{\sin^2 u} = -6(\cot u) + K$$

$$= \underline{-6\cot(7x) + K}$$

(b) $\int x e^{-x^2}\,dx$. Setter $u = x^2$, $du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}\,du = -\frac{1}{2}e^{-u} + K = \underline{-\frac{1}{2}e^{-x^2} + K}$$

(c) $\int e^x \cos(e^x)\,dx$, Setter $u = e^x$, $du = e^x\,dx$

$$= \int \cos u\,du = \sin u + K = \underline{\sin(e^x) + K}$$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$. Setter $u = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$= 2\int \frac{du}{\cos^2 u} = 2\tan u + K = \underline{2\tan\sqrt{x} + K}$$

(e) $$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$u = 1 + x^2$
$du = 2x\,dx$

$$= \underline{\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K}$$

Oppgave:

$$f(x) = e^x$$

Skal bestemme et polynom p av lavest mulig grad som er s.a.:

$p(0)=f(0)$, $p'(0)=f'(0)$, $p''(0)=f''(0)$, $p'''(0)=f'''(0)$ og $p^{(4)}(0)=f^{(4)}(0)$.

Vi prøver forsöksvis med

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \quad ; \quad p(0) = a$$

$p'(x) = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$ $\qquad p'(0) = b$

$p''(x) = 2c + 6dx + 12ex^2$ $\qquad p''(0) = 2c$

$p'''(x) = 6d + 24ex$ $\qquad p'''(0) = 6d$

$p^{(4)}(x) = 24e$ $\qquad p^{(4)}(0) = 24e$

Vi har dessuten:

$f(x) = e^x$ $\qquad f(0) = 1 = a \Rightarrow a = 1$

$f'(x) = e^x$ $\qquad f'(0) = 1 = b \Rightarrow b = 1$

$f''(x) = e^x$ $\qquad f''(0) = 1 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$f'''(x) = e^x$ $\qquad f'''(0) = 1 = 6d \Rightarrow d = \frac{1}{6}$

$f^{(4)}(x) = e^x$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1 = 24e \Rightarrow e = \frac{1}{24}$

Altså:

$$p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

PROBLEM:

Kunne man funnet et polynom av lavere grad enn 4 s.a. betingelsene ovenfor er oppfylt? Svaret er nei! Ovenstående regning viser spesielt at alle koeffisientene i vårt polynom $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ må være $\neq 0$.

ØVING 10 (29/10 - 30/10 - 2012)

VIKTIGE KOMMENTARER TIL BESVARELSENE.

8.3 Oppgave 6, s. 383

(a) Vi skal bevise at når

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt \text{ , så er:}$$

$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Vi setter da:

$$F(u) \overset{(*)}{=} \int_a^u f(t)\,dt \text{ og har: } F'(u) = f(u).$$

Videre ser vi da at:

$$G(x) = F(g(x))$$

Kjerneregelen gir da: $\underline{G'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x)}$ $= \underline{f(g(x)) \cdot g'(x)}$ ut fra vår definisjon av F ovenfor! (*)

(Mange er litt uklare i argumentasjonen på denne oppgaven!)

Oppgave 7, s 383

Her benyttes l'Hôpitals regel nokså "frisk" – uten at man har kontrollert at vi har $\frac{0}{0}$- eller $\frac{\infty}{\infty}$-uttrykk i utgangspunktet. I (b) har vi f. eks.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_1^x e^{\frac{1}{t}}\,dt}{x^2}$$ og alle hevder at

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x e^{\frac{1}{t}}\,dt = \infty.$$ Er det helt opplagt?

Vi kan ikke bare hevde at dette følger av at integralets grenser 1 og x gir større og større areal under kurven når $x \to \infty$. Hvis vi ser på f. eks.

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x t^{-2}\,dt$$, vil også arealet under

vokse når $x \to \infty$. Men her har vi:

$$\int_1^x t^{-2}\,dt = \left[-t^{-1}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x},$$

som vokser mot 1 når $x \to \infty$.

Hvordan begrunner vi påstandene?

(a) $\lim_{x\to 0} \int_0^x e^{-t^2}\,dt = 0$ fordi $e^{-t^2} < 1$ i $(0,x)$ og derfor vil $\int_0^x e^{-t^2}\,dt < \int_0^x 1\cdot dt = x$.

(b) $\lim_{x\to \infty} \int_0^x e^{\frac{1}{t}}\,dt = \infty$ fordi $e^{\frac{1}{t}} > 1$ når $t > 0$ og $\int_0^x 1\cdot dt \to \infty$ når $x \to \infty$.

(c) $\lim_{x\to 0} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt = 0$ fordi $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ -og velges $0 < x < \delta$ blir f.eks. $\left|\frac{\sin t}{t}\right| < 2$.

Altså har vi:

$$\left|\int_0^{\delta^2} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq 2\left[\delta^2 - 0\right] \xrightarrow[\text{når } \delta \to 0]{} 0$$

TILLEGGSOPPGAVE:

$f(x) = e^x$. Vi skal bestemme et polynom av lavest mulig grad $p(x)$ s.a.

$p(0) = f(0) = 1$, $p'(0) = f'(0) = 1$, $p''(0) = f''(0) = 1$, $p'''(0) = f'''(0) = 1$ og $p^{(4)}(0) = f^{(4)}(0) = 1$

Vi prøver med: $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

Vi får da: $p(0) = a$, $p'(0) = b$, $p''(0) = 2c$, $p'''(0) = 3\cdot 2\cdot d$, $p^{(4)}(0) = 4\cdot 3\cdot 2\, e$

Sammenligningen gir: $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{6}$, $e = \frac{1}{24}$. Altså: $p(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$

Man kan ikke finne polynom av lavere grad som oppfyller betingelsene fordi $e \neq 0$ er både nødvendig og tilstrekkelig ovenfor!!

Kommentarer generelt: øving 10

Oppgave 8.3.5: Når dere bruker A.F.T SKAL dere husk å bemerke at f er kontinuerlig i $[a, b]$!!!

Oppgave 8.3.6: a) Husk dette resultat !!

Oppgave 8.3.7: c) Husk resultat fra oppgave 8.3.6 a).

MA 1101, ØVING 11, LØSNING

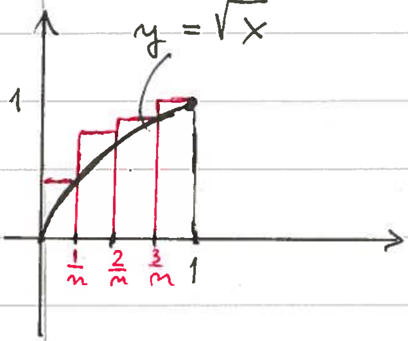
Mandag 5/11 – Tirsdag 6/11 – 2012.

8.5 Oppgave 4, s. 396

Vi skal bevise at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \right) = \frac{2}{3}$$

ved å gjenkjenne venstresiden som en Riemannsum for integralet $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx$.



Oversummen illustrert til venstre blir:

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n-1}{n}} + \sqrt{\frac{n}{n}} \right)$$

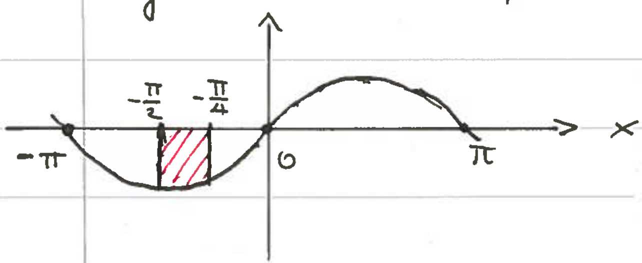
Siden $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

er det klart ut fra teorien at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} = \underline{\frac{2}{3}}$$

8.6 Oppg 1, s. 407

(c) Vi skal beregne arealet av området begrenset av $y = \sin x$, x-aksen og $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4}$. Arealet blir:

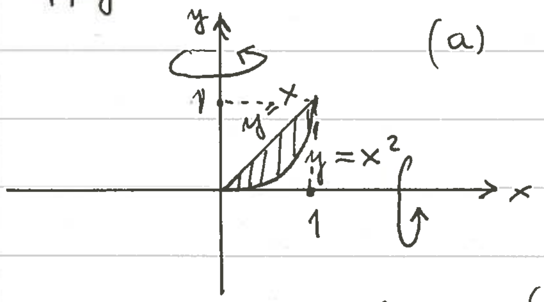


$$A = \overset{\text{NB!}}{-} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin x\, dx$$

$$= \left[\cos x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Oppg. 9, s409



(a) Det angitte området roteres om x-aksen.

Vi skal beregne volumet:

$$V = \pi \left(\int_0^1 \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) dx \right)$$

8.6.3 der $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \pi \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5 \right]_0^1$$

$$= \pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}\right) = \underline{\frac{2\pi}{15}}$$

(b) Det angitte området roteres om y-aksen.

T8.6.5

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = \underline{\frac{\pi}{6}}$$

Oppg. 11, s. 409

(c) Vi skal beregne buelengden av grafen til $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln x$ når $x = 1$, $x = e$ gir endepunktene.

$$f'(x) = x - \frac{1}{4x}$$

Buelengden blir da:

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

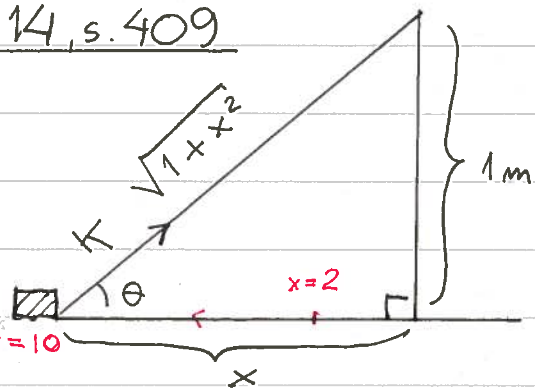
$$= \int_1^e \sqrt{1 + \left(x - \tfrac{1}{4x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \sqrt{1 + x^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16x^2}}\, dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16x^2}}\, dx = \int_1^e \sqrt{\left(x + \tfrac{1}{4x}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_1^e \left(x + \tfrac{1}{4x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x \right]_1^e = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 0$$

$$= \underline{\frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}}$$

Oppg. 14, s. 409



NB! $K\cos\Theta$ har motsatt fortegn til x

Kraftens komponent i veiens retning:
$K\cos\Theta = -10x/\sqrt{1+x^2}$
Arbeidet som utføres blir da:

$$\Delta A = \frac{-10x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \Delta x$$ for et kort veistykke.

Det totale arbeid som utføres fra $x = 10$ til $x = 2$:

$$A = \int_2^{10} \frac{10x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

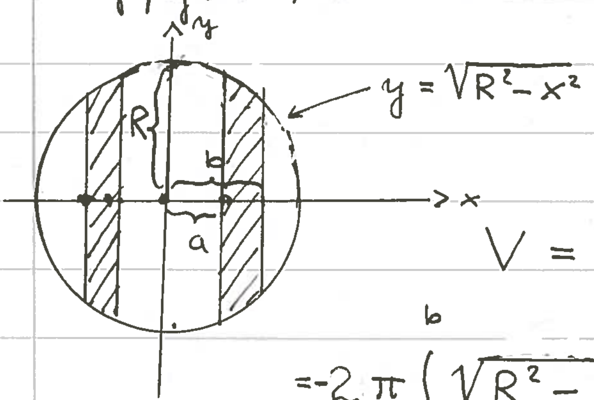
$$= 5\int_2^{10} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

Vi substituerer: $u = 1+x^2$; $du = 2x\,dx$

$$5\int \frac{du}{u^{1/2}} = 5\int u^{-\frac{1}{2}}du = 5\cdot 2\,u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 10\sqrt{1+x^2} + C$$

$$5\int_2^{10} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[10\sqrt{1+x^2}\right]_2^{10} = 10\left[\sqrt{101} - \sqrt{5}\right]$$
$$\approx 10(10.05 - 2.24)$$
$$= \underline{78.1}$$

Oppg 21, s. 410



Vi skal beregne volumet av "røret" som er skravert.

$$V = 2\cdot 2\pi \int_a^b x\,f(x)\,dx$$

$u = R^2 - x^2$, $du = -2x\,dx$

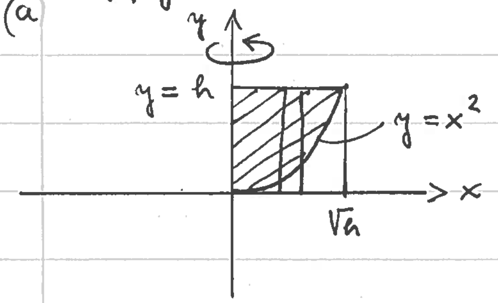
$$= -2\pi \int_a^b \sqrt{R^2 - x^2}\,(-2x)\,dx = -2\pi \int_{R^2-a^2}^{R^2-b^2} u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \left[-2\pi \frac{2}{3} u^{3/2}\right]_{R^2-a^2}^{R^2-b^2} = -\frac{4\pi}{3}\left[(R^2-b^2)^{3/2} - (R^2-a^2)^{3/2}\right]$$

$$= \underline{\frac{4\pi}{3}\left[(R^2-a^2)^{3/2} - (R^2-b^2)^{3/2}\right]}$$

Oppg. 23, s. 410:

(a



Volumet som framkommer:

$$V = \pi(\sqrt{h})^2 \cdot h - 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} x\, f(x)\,dx$$

$$= \pi h^2 - 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} x \cdot x^2\,dx$$

$$= \pi\left(h^2 - 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{h}}\right)$$

$$= \pi\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \underline{\tfrac{1}{2}\pi h^2}$$

(b) Vannmengde ved tiden t:

$$V(t) = \frac{\pi}{2} h(t)^2$$

$$V'(t) = \pi h(t) h'(t)$$

$$2\,\mathrm{m^3/s} = \pi \cdot 1 \cdot h'(t_1)$$

$$\underline{h'(t_1) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{m/sek}}$$

Oppg. 27, s. 411:

(a) Vi skal regne ut

$$I_p = \int_0^{32} (32-u)^2 u^p\,du \quad , \quad \text{der } p > 0.$$

$$\int_0^{32} \left(32^2 \cdot u^p - 64u^{p+1} + u^{p+2}\right) du$$

$$= \left[32^2 \frac{u^{p+1}}{p+1} - 64\frac{u^{p+2}}{p+2} + \frac{u^{p+3}}{p+3}\right]_0^{32}$$

$$= \frac{1}{p+1} \cdot (32)^{p+3} - \frac{64}{p+2}(32)^{p+2} + \frac{32^{p+3}}{p+3}$$

$$= (32)^{p+3}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{2}{p+2} + \frac{1}{p+3}\right)$$

$$= (32)^{p+3} \cdot \frac{(p+2)(p+3) - 2(p+1)(p+3) + (p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$= (32)^{p+3}\,\frac{(p+3) - (p+1)}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \underline{\frac{2(32)^{p+3}}{(p+1)(p+2)(p+3)}}$$

(b) Vi skal bestemme maks til:

$$f(x) = c(x-16)^m(48-x)^n, \quad 16 \leq x \leq 48$$

$$f'(x) = c\left[m(x-16)^{m-1}(48-x)^n - (x-16)^m \cdot n(48-x)^{n-1}\right]$$

$$= c(x-16)^{m-1}(48-x)^{n-1} \cdot \left[m(48-x) - n(x-16)\right]$$

$= 0$ for $x = 28$. Altså må vi ha:

$$m \cdot 20 - n \cdot 12 = 0 \quad \text{eller} \quad m/n = \frac{3}{5}.$$

BEGRUNNELSE:

Funksjonen f ovenfor er deriverbar for alle $x \in (16,48)$ og $f(x)=0$ for $x \le 16$ og $x \ge 48$. Vi har funnet at den har eksakt et punkt x_0 i $(16,48)$ der $f'(x_0)=0$. Siden $f(x) \ge 0$ for alle x, må $x=x_0$ gi det globale maksimum. Generelt må vi ha $x_0 = \frac{48m+16n}{m+n}$.

(c) Vi velger nå $m=2$ og $n = 10/3$ i resten av oppgaven. Vi skal regne ut

$$c\int_{16}^{48}(x-16)^2(48-x)^{10/3}dx$$

Vi innfører $u = 48-x$, og får $du = -dx$. $x-16 = 48-u-16 = 32-u$. Dette gir:

$$-c\int_{32}^{0}(32-u)^2 \cdot u^{10/3}du = c\int_0^{32}(32-u)^2 u^{10/3}du$$

$$\overset{\text{fra (a)}}{=} c \cdot \frac{2\cdot(32)^{19/3}}{\frac{13}{3}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{19}{3}} = c \cdot \frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot 16\cdot 19}$$

Vi velger c slik at dette integralet blir lik 1.86 og får:

$$c\,\frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot16\cdot19} = 1.86 \quad \therefore \quad \underline{c = 1.86\,\frac{13\cdot16\cdot19}{54\cdot(32)^{19/3}}}$$

(d) Ut fra definisjon av gjennomsnitt gitt på forelesning skal vi bestemme $\bar{x}$ slik at

$$\bar{x} = \frac{\int_{16}^{48} x f(x)\,dx}{\int_{16}^{48} f(x)\,dx} = \frac{I}{I_{10/3}}$$

der f er funksjonen i (c)

Integralet i nevneren er bestemt i (c):

$$\int_{16}^{48} f(x)\,dx = c\,\frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot16\cdot19}$$

Vi beregner integralet i telleren:

$$I = c\int_{16}^{48} x\,(x-16)^2(48-x)^{10/3}\,dx$$

Substitusjonen $u = 48 - x$ gir da:

$x = 48 - u$, $dx = -du$, $x = 16 \Rightarrow u = 32$

og $x = 48 \Rightarrow u = 0$. Dette gir:

$$I = c\int_{32}^{0} (48-u)(32-u)^2 u^{10/3}(-1)\,du$$

$$= c\int_{0}^{32} 48\cdot(32-u)^2\cdot u^{10/3}\,du - c\int_{0}^{32}(32-u)^2 u^{13/3}\,du$$

$$= c\,\frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot16\cdot19}48 - c\,\frac{54\cdot(32)^{\frac{22}{3}}}{16\cdot19\cdot22}$$

der det siste følger fra (a) når $p = 13/3$.

Videre har vi da:

$$I = c\,\frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot16\cdot19}\left[48 - \frac{32\cdot13}{22}\right]$$

$$= 1.86\cdot\left[48 - \frac{416}{22}\right] \approx 1.86\,[48 - 18.9]$$

$$= 1.86\cdot \qquad = 1.86\cdot 29.1$$

$$\bar{x} = \frac{I}{I_{10/3}} = \frac{\cancel{1.86}\cdot 29.1}{\cancel{1.86}} = 29.1$$

Altså er gjennomsnittsalderen for en fødende kvinne <u>29.1 år.</u>

9.1 Oppg 1, s. 434

(e)

$$\int \arctan x\,dx = \int 1 \cdot \arctan x\,dx$$

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \underline{x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C}$$

Oppg 3, s 434

Alt: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

(c)

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cdot \cos x\,dx$$

$$= \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x)\,dx$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x)\,dx$$

$$= \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx$$

$$2\int \cos^2 x\,dx = \sin x \cdot \cos x + x + K$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \underline{\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + \frac{1}{2}x + C}$$

9.2 Oppg. 1, s 442

(c)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx$$

Vi innfører
$u = \sqrt{x}+1$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

$$= 2\int \frac{x^{3/2}\,dx}{(\sqrt{x}+1)\,2\sqrt{x}} = 2\int \frac{(u-1)^3}{u}\,du$$

$$= 2\int \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u}\,du$$

$$= 2\int \left(u^2 - 3u + 3 - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} - \frac{3}{2}u^2 + 3u - \ln|u|\right) + C$$

$$= \underline{2\left[\frac{1}{3}(\sqrt{x}+1)^3 - \frac{3}{2}(\sqrt{x}+1)^2 + 3(\sqrt{x}+1) - \ln(\sqrt{x}+1)\right] + C}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ Innfører $u = e^x$, $du = e^x dx$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \underline{\arcsin(e^x) + C}$$

9.3 Oppg. 1, s 455

(a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx$; $\displaystyle\frac{x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

$$= \frac{Ax - 2A + Bx - B}{(x-1)(x-2)}$$

Får da: $\left.\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -2A - B &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} A &= -2 \\ B &= 3 \end{aligned}$

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)}\,dx = \int \frac{-2\,dx}{x-1} + \int \frac{3\,dx}{x-2}$$

$$= \underline{-2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C}$$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx$; $\displaystyle\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

$(x+1)(x-2)$

$$= \frac{Ax - 2A + Bx + B}{x^2-x-2}$$

$A + B = 1$, $A = -2$

$-2A + B = 7$, $B = 3$

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx = -2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \underline{-2\ln|x+1| + 3\ln|x-2| + C}$$

ØVING 11 (5/11 – 6/11 – 2012)

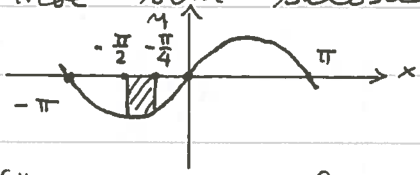
VIKTIGE KOMMENTARER TIL BESVARELSENE.

8.6 **Oppg. 1 s. 407**

(c) Endel skriver opp

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\pi/4} \sin x \, dx$$

for arealet. En enkel skisse viser at dette må gi et negativt areal – noe som selvsagt er galt.



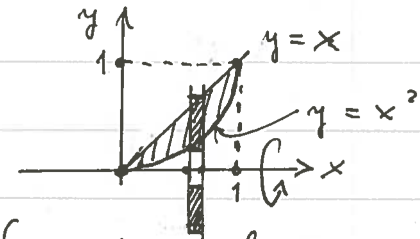
GENERELT RÅD:

Tegn en enkel skisse før du skriver opp formelen. En kontroll med figuren kan sikre deg at formelen er riktig!

NB! Dette er nyttig i flere av oppgavene i denne øvingen!

Oppg. 9, s. 409

(a) Her er det også nyttig å starte med en enkel skisse. Vi skal rotere det angitte flatestykket om x-aksen



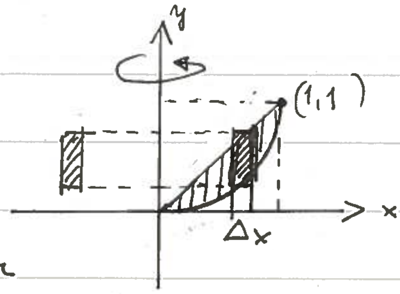
I stedet for å pugge formler kan vi ved en enkel figur-betraktning finne volum når vi ser på et intervall av lengde Δx og rotere dette smale arealet om x-aksen. Vi får da:

(SKIVE-METODEN) $\Delta V = \underbrace{\pi x^2 \cdot \Delta x}_{\text{ytre sylinder}} - \underbrace{\pi x^4 \cdot \Delta x}_{\text{indre sylinder}}$

Addisjon og grensebetraktning gir da:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \underline{\frac{2\pi}{15}}$$



(b) En figur kan også være til hjelp her for å huske formelen. Her roteres det lille flatestykket om y-aksen og vi får et tynt sylindrisk rør. Det tilsvarende volumet blir da:

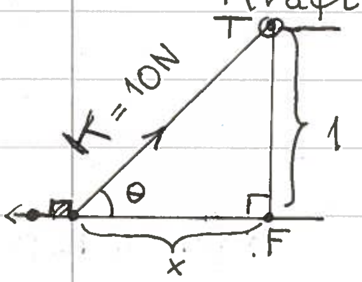
(SYLINDER-METODEN)
$$\Delta V = \underbrace{2\pi x}_{\text{lengden av sirkelen}} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{Tykkelsen}} \cdot \underbrace{f_1(x)}_{\text{Höyden}} - 2\pi x\, \Delta x \cdot f(x_2)$$

Dermed får vi:
$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x \, dx - 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 \, dx$$
$$= 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = 2\pi\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = \underline{\tfrac{\pi}{6}}$$

Oppg. 14, s. 409

Her var det en del "ulne" betraktninger!
Definisjonen av arbeid generelt:

Kraftens komponent i veiens retning × (ganger) veien.



I et vilkårlig øyeblikk befinner klossen seg i avstanden x fra fotpunktet F til normalen fra trinsen T ned på gulvet.

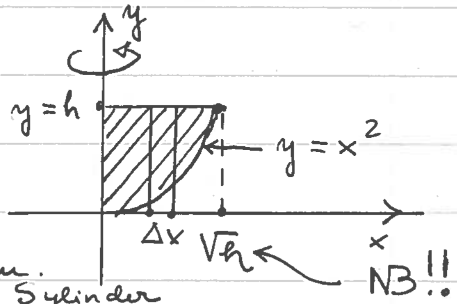
Kraftens komponent i veiens retning er da: $K \cdot \cos\Theta = K \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

På et lite veistykke er da arbeidet:
$$\Delta A = \frac{Kx}{\sqrt{1+x^2}} \Delta x .$$

Arbeidet blir dermed: $A = \int_2^{10} \frac{10x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

? (Orienteringen av x er noe merkelig. Men vi er vel egentlig interessert i absolutt-verdien av arbeidet?) Utregning gir: $\underline{A = 10(\sqrt{101} - \sqrt{5})}$

Oppg. 23, s. 410



(a) Vi skal finne volumet når det skraverte flatestykket roteres om y-aksen.

Sylinder

Igjen er en figur nyttig. Rør-metoden gir:

$$\Delta V = 2\pi x \Delta x \cdot h - 2\pi x \Delta x \cdot x^2$$

som gir: $V = 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} (x \cdot h - x \cdot x^2)\, dx$

$$= 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \cdot h - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{h}} = 2\pi \left(\tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{4}h^2\right] = \underline{\pi \frac{h^2}{2}}$$

(b) Vannmengden i karet ved tiden t:

$$V(t) = \pi \frac{h(t)^2}{2}$$

$V'(t) = \pi h(t) \cdot h'(t)$ $\qquad$ $V'(t) \equiv 2 m^3/s$ konstant.

$h(t_1) = 1$ m. $\qquad$ $h'(t_1) = V'(t_1) / \pi \cdot h(t_1) = \underline{\frac{2}{\pi} m/sek}$

Oppg. 27, s 411 (PREMIE-OPPGAVEN)

(a) $\int_0^{32} (32-u)^2 u^p \, du = \int_0^{32} (32^2 \cdot u^p - 2 \cdot 32 u^{p+1} + u^{p+2})\, du$

$$= \left[32^2 \cdot \frac{u^{p+1}}{p+1} - 2 \cdot 32 \frac{u^{p+2}}{p+2} + \frac{u^{p+3}}{p+3}\right]_0^{32}$$

$$= \frac{32^{p+3}}{p+1} - 2\frac{32^{p+3}}{p+2} + \frac{32^{p+3}}{p+3} = \underline{\underline{32^{p+3} \frac{2}{(p+1)(p+2)(p+3)}}}$$

(b) $f(x) = c(x-16)^m (48-x)^m$; $16 \leq x \leq 48$.

$$f'(x) = c\left[m(x-16)^{m-1}(48-x)^m - (x-16)^m \cdot m(48-x)^{m-1}\right]$$

$$= c(x-16)^{m-1}(48-x)^{m-1}\left[m(48-x) - m(x-16)\right] = 0$$

For lokalt – og dermed også absolutt maksimum – må vi ha:

$$m(48-x) = m(x-16)$$

fordi faktorene $(x-16)$ og $(48-x)$ er $\neq 0$ i det aktuelle området. For $16 < x < 48$ er dessuten $f(x) > 0$. Det oppgies at den søkte x-verdien som gir maks er $x = 28$:

$$m(48-28) = n(28-16)$$

$$20m = 12n \quad \therefore \quad \underline{m = \tfrac{3}{5} n.}$$

(c)

$$I = c\int_{16}^{48} (x-16)^2 (48-x)^{10/3} dx$$ Vi setter

$u = 48 - x$, $du = -dx$, $x - 16 = 32 - u$

$x = 16$ gir $u = 32$, $x = 48$ gir $u = 0$.

$$I = -c\int_{32}^{0} (32-u)^2 \cdot u^{10/3} du = c\int_{0}^{32} (32-u)^2 \cdot u^{10/3} du$$

$$\overset{\text{fra (a)}}{=} c \cdot \frac{2\cdot(32)^{19/3}}{\frac{13}{3}\cdot\frac{16}{3}\cdot\frac{19}{3}} = \frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot16\cdot19} c$$ $\underline{\text{Ønsker dette lik } 1.86.}$

Dette gir: $\underline{c = 1.86 \dfrac{13\cdot16\cdot19}{54\cdot(32)^{19/3}}}$

(d) Vi ønsker å bestemme gjennomsnittet:

$$\bar{x} = \int_{16}^{48} x f(x) dx \Big/ \int_{16}^{48} f(x) dx$$

der f er funksjonen i (c). Vi regner ut:

$$c\int_{16}^{48} x(x-16)^2 (48-x)^{10/3} dx = c\int_{32}^{0} (48-u)(32-u)^2 u^{10/3} (-du)$$

med samme variabelskifte som i (c)

Dette gir:

$$c\int_{0}^{32} 48(32-u)^2 u^{10/3} du - c\int_{0}^{32} (32-u)^2 u^{13/3} du \overset{\text{fra (c)}}{=}$$

$$c\,\frac{54\cdot(32)^{19/3}}{13\cdot16\cdot19}\left[48 - \frac{32\cdot13}{22}\right] \overset{\text{fra (c)}}{=} 1.86\,[48 - 18.9] = 1.86\cdot 29.1$$

Siden $\int_{16}^{48} f(x)dx = 1.86$, blir $\bar{x} = \dfrac{29.1\cdot1.86}{1.86} = \underline{29.1}$

9.1 Oppgave 3,(c), s. 434

ALTERNATIV METODE:
Benytt : $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$I = \int \cos^2 x\, dx$. Delvis integrasjon gir:

$$I = \sin x\cos x + \int \cos x \cos x\, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= \sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\, dx = \sin x \cos x - I.$$

Flytter over og får: $2I = \sin x\cos x + x + C$

$$\underline{I = \tfrac{1}{2}\sin x\cos x + \tfrac{1}{2}x + K}$$

Oppgave 8.6.11 c)

$$\left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{1}{4x}\right)^2 - 2 \cdot x \frac{1}{4x}$$

$$= x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$$

eller

$$\left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)\left(x - \frac{1}{4x}\right)$$

$$= x^2 - \frac{1}{4x}x - \frac{1}{4x} \cdot x + \left(\frac{1}{4x}\right)^2$$

$$= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16x^2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$$

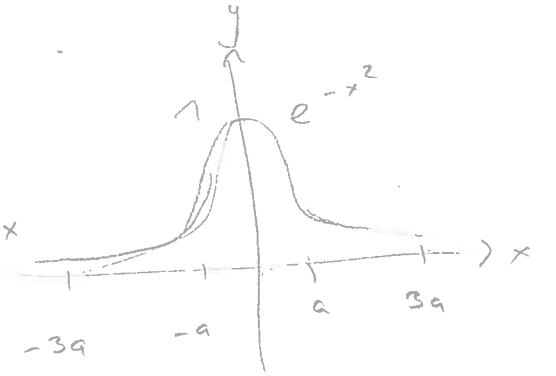
Oppgave 8.6.1 c)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \cdot \cancel{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Generelt: Litt vanskeligere oppgaver enn ellers. Spør gjerne.

Hint oppgave 8.3.8

$$g(a) = \int_a^{3a} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{3a} e^{-x^2}\,dx - \int_0^{a} e^{-x^2}\,dx$$



Se på nullpunkter for $g'(a)$

(Husk kjerneregelen).

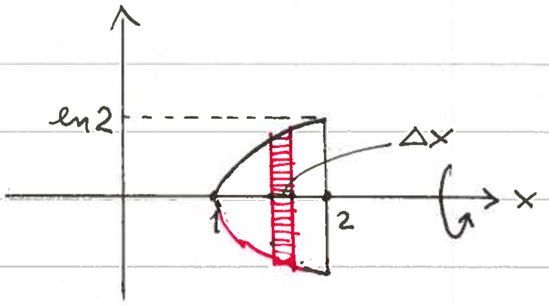
MA 1101, ØVING 12, LØSNING

Mandag 12/11 – Tirsdag 12/11 – 2012

9.1 Oppgave 15, s. 435

Vi skal finne volumet til det omdreiningslegemet som framkommer når flatestykket begrenset av grafen til $y = \ln x$, $x = 2$ og x-aksen roteres om x-aksen. Vi har da for et lite volum:

$$\Delta V = \pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x$$



Dette leder til:

$$V = \pi \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

$$\int 1 \cdot (\ln x)^2 = x(\ln x)^2 - \int \left(x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}\right) dx$$
$$= x(\ln x)^2 - 2\int 1 \cdot \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2\left(x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx\right) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + K$$

Dette gir:

$$V = \pi\left[x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x\right]_1^2 = \pi\left[2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 4 - 0 + 2 \cdot 0 - 2\right] = \underline{\pi\left(2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2\right)}$$

Oppgave 19, s. 435

$I_n \overset{\text{def}}{=} \int (\ln x)^n dx$. Vi skal bevise at:

$$I_n = x(\ln x)^n - n \cdot I_{n-1}$$

$$I_n = \int 1 \cdot (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int \cancel{x} \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$$
$$= x(\ln x)^n - n I_{n-1}$$

$$I_3 = x(\ln x)^3 - 3 \cdot I_2 = x(\ln x)^3 - 3\left[x(\ln x)^2 - 2 I_1\right]$$
$$= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\int 1 \cdot \ln x \, dx =$$
$$x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6\left[x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx\right]$$
$$= \underline{x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C}$$

9.2 Oppgave 15, s. 442

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \begin{array}{l} u = 4-x^2 \\ du = -2x\,dx \end{array}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot u^{\frac{1}{2}} + K$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{4-x^2} + K$$

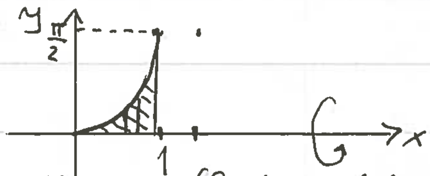
$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1} - \arcsin 0 + \sqrt{4} = \underline{\frac{\pi}{3}+1}$$

Oppgave 23, s. 443

$y = \arcsin x \;;\; 0 \le x \le 1$, dreies om x-aksen.

Vi skal bestemme volumet av omdreiningslegemet som framkommer når det angitte flatestykke dreies om x-aksen.



NB! $\frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$V = \pi\int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx$$

$$\int 1(\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2 - \int x\cdot 2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= x(\arcsin x)^2 - \left(-2\arcsin x\sqrt{1-x^2} + 2\int \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\cancel{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right)$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + K$$

$$V = \pi\int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx = \pi\left[\left(1\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1\right) - (0+0+0)\right]$$

$$= \underline{\frac{\pi^3}{4} - 2\pi}$$

9.3 **Oppgave 3 b, s. 455**

$$\int \frac{2x-2}{x^2+4x+8}\,dx$$

$x^2+4x+8 = (x+2)^2+4$ har ingen reell rot.

$$\int \frac{2x-2}{x^2+4x+8}\,dx = \int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+8} + \int \frac{-6\,dx}{x^2+4x+8}$$

Med $u = x^2+4x+8$, $du = (2x+4)\,dx$, får vi:

$$\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+8} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K = \ln(x^2+4x+8)+K$$

Vi har videre:

$$-6\int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = -\frac{6}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} = -3\int \frac{\frac{1}{2}\,dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1}$$

$$= -3\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + K$$

$$\int \frac{2x-2}{x^2+4x+8}\,dx = \underline{\ln(x^2+4x+8) - 3\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right) + K}$$

Oppgave 5 f, s. 455

$$\int \frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$$

Konstaterer at graden i teller er < grad i nevner.

$$\frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{A(x^2+2x+1) + B(x-1) + C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (2A+B)x + (A-B-C)}{(x-1)(x+1)^2}$$

Dette gir:

$$\begin{aligned} A \quad\quad + C &= 3 \\ 2A + B \quad\quad &= 1 \\ A - B - C &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \;\; -1 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} C &= 2 \\ B &= -5+2C = -5+4=-1 \\ A &= 3-C = 3-2=1 \end{aligned}$$

Altså:

$$\int \frac{3x^2+x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{-1\,dx}{(x+1)^2} + \int \frac{2\,dx}{x+1}$$

$$= \underline{\ln|x-1| + \frac{1}{x+1} + 2\ln|x+1| + K}$$

10.1 Oppgave 1, s. 497

(a) Vi skal avgjöre om $y = e^{2x}$ er lösning av differensialligningen

$$y' - 2y = 0$$

$y = e^{2x}$ gir $y' = 2e^{x}$. Altså:

$$y' - 2y = 2e^{x} - 2e^{x} = 0$$

Altså er svaret ja!

(f) Samme oppgave for $y = \arctan x$ for differensialligningen:

$$y' + xy = x^3$$

$y' = \frac{1}{1+x^2}$. Innsetting i venstre siden gir:

$$\frac{1}{1+x^2} + x\arctan x \neq x^3$$

Svaret her er nei!

Oppgave 3, s. 497

(a) $y' - \frac{2}{x}y = x^2$ på $(0,\infty)$

Vi har her $\int -\frac{2}{x}\,dx = -2\ln x + K$

Multipliserer med $e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$ og får:

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1 \quad \text{eller}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = 1 \; ; \; \frac{1}{x^2}y = x + C \; ; \; \underline{y = x^3 + Cx^2}$$

(f) $y' - \tan x \cdot y = x \qquad ; \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Vi har her:

$$\int (-\tan x)\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = \ln|\cos x| + K$$

$e^{\ln(\cos x)} = \cos x$. Vi multipliserer med $\cos x$:

$$\cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = x \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(y \cdot \cos x) = x \cos x$$

$$y \cos x = \int x \cos\,dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x\,dx$$

$$= x \sin x + \cos x + K$$

$$y \cos x = x \sin x + \cos x + K$$

$$\underline{y = x \tan x + 1 + K/\cos x}$$

(g) $\sin^2 x \cdot y' - y = 1 \qquad x \in (0, \pi)$

$$y' - \frac{1}{\sin^2 x}\,y = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int -\frac{dx}{\sin^2 x} = \cotan x + K$$

Multipliserer med $e^{\cotan x}$

$$y' e^{\cotan x} - \frac{e^{\cotan x}}{\sin^2 x}\,y = \frac{e^{\cotan x}}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\cotan x}\right) = \frac{e^{\cotan x}}{\sin^2 x}$$

$$\int \frac{e^{\cotan x}}{\sin^2 x}\,dx = -\int e^u\,du \qquad u = \cotan x, \quad du = \frac{-dx}{\sin^2 x}$$

$$= -e^u + K = -e^{\cotan x} + K$$

Multipliserer med $-e^{\cotan x}$:

$$\underline{-y' \cdot e^{\cotan x}} + e^{\cotan x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-e^{\cotan x}}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(-y e^{-\cotan x}\right) = \frac{-e^{\cotan x}}{\sin^2 x}$$

$$-y e^{\cotan x} = \int \frac{-e^{\cotan x}}{\sin^2 x}\,dx = e^{\cotan x} + K$$

$$\underline{y = -1 + Ke^{-\cot a n\, x}}$$

10.2 Oppgave 11, s506

En tank inneholder 200 l rent vann. Vi fyller i 2 l/min av en saltoppløsning der 1 l inneholder $\frac{1}{4}$ kg salt i 3 minutter, uten at noe tappes ut. Altså vil vi da ha:

206 l væske

som inneholder: 1.5 kg salt. Vi starter så å tappe ut 2l/min av blandingen og tapper inn like mye væske der hver liter inneholder 0.25kg salt. Hvor mye salt inneholder tanken når det er gått 25 min etter starten. Diffligningen fremkommer ved at vi ser på et kort tidsintervall Δt der konsentrasjonen kan oppfattes som konstant. $y = y(t)$ mengden av salt i tank ved tiden t:

$$\Delta y = \underbrace{-2 \cdot \overbrace{\frac{y}{206}}^{\text{Konsentrasjon.}}}_{\text{Salt ut pr.min}\cdot\Delta t} \Delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\Delta t}_{\text{Salt inn}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{1}{103}y = \frac{1}{2} \quad ; \; \Delta t \to 0 \text{ gir}$$

$$y'(t) + \frac{1}{103}y = \frac{1}{2} \qquad \int \frac{dt}{103} = \frac{t}{103} + K$$

Multipliserer med $e^{t/103}$:

$$y' \cdot e^{\frac{t}{103}} + \frac{1}{103}e^{\frac{t}{103}}y = \frac{1}{2}e^{t/103}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y e^{\frac{t}{103}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{103}}$$

Dette gir:

$$y e^{\frac{t}{103}} = \frac{1}{2}\int e^{\frac{t}{103}} dt = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{103}} \cdot 103 + C$$

$$y = 51.5 + Ce^{-\frac{t}{103}}$$

Ved $t=0$ har vi at $y(0) = 1.5$

Altså:

$$1.5 = 51.5 + C \quad \therefore \quad C = -50$$

Løsningen blir:

$$\underline{y = 51.5 - 50e^{-\frac{t}{103}}}$$

$$y(22) = 51.5 - 50 \cdot e^{-\frac{22}{103}}$$

$$\approx 51.5 - 40.4 \approx \underline{\underline{11.1}}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \underline{51.5}$$

ØVING 12 (12/11 – 13/11 – 2012)

NOEN KOMMENTARER TIL BESVARELSENE.

GENERELL BEMERKNING:

Bare 9 av 23 leverte denne gang – og flere av besvarelsene var nokså tynne! Siden oppgavene på slutten av kurset er like eksamensrelevante som de tidligere, er det uheldig at mange slutter å levere fordi de har nok godkjente allerede! Vi henstiller derfor til alle som ligger etter når det gjelder det stoffet som denne øvingen bygger på om å ta et krafttak og jobbe med disse oppgavene i etterkant.

9.2 Oppgave 15, s. 442

Mange var i villrede om hvordan

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

skulle angripes. Delvis integrasjon og substitusjon virket håpløst i utgangspunktet. Oppdeling er tingen her!!

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Da ser vi at:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}$$, og dette integralet "ber om" substitusjonen

$$u = \tfrac{1}{2}x, \quad du = \tfrac{1}{2}\,dx,$$ og videre:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + K = \underline{\arcsin \tfrac{x}{2} + K}$$

Det andre integralet löses ved å sette

$u = 4 - x^2 \qquad du = -2x\,dx$ og derfor:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{-2x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{1/2}} = -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\cdot 2 + K$$

$$= \underline{-\sqrt{4-x^2} + K}$$ (Videre regning overlates til leserne!)

9.3 Oppgave 5 f, s. 455

$$\frac{3x^2 + x}{(x-1)(x+1)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

der A, B, C skal bestemmes. Noen starter slik:

$$\frac{3x^2 + x}{(x-1)(x+1)^2} \equiv \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x + \gamma}{(x+1)^2}$$

og bestemmer α, β, γ. Det er lett å vise at denne siste varianten også gir entydig bestemte α, β, γ. Man får da:

$$\int \frac{3x^2 + x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,dx$$ *

Den første varianten gir:

$$\int \frac{3x^2 + x}{(x-1)(x+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \underline{\ln|x-1| + \frac{1}{x+1} + 2\ln|x+1| + K}$$

I den siste varianten må noe omregning til for å beregne *

NB! Regnemessig er det derfor fordelaktig å benytte den første varianten. Det er dette som behandles i læreboken på s. 447. Se også 9.3.3 Eksempel.

10.1 <u>Oppgave 3(g), s. 497</u>

$$(\nabla) \qquad \sin^2 x \cdot y' - y = 1 \quad ; \quad x \in (0, \pi)$$

<u>NB!</u> Legg merke til at i 10.1 er utgangspunktet første ordens differensial-ligningen av typen:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

For å benytte teorien må vi derfor skrive om den gitte differensialligning til:

$$y' - \frac{1}{\sin^2 x} y = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\int f(x)dx = -\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \cot x + K$$

Integrerende faktor blir dermed: $e^{\cot x}$.

Vi får da:

$$y' e^{\cot x} - \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} y = \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}$$

<u>NB!</u> På dette punkt er det lurt å huske på at den opprinnelige ligning (∇) skal multipliseres med integrerende faktor – i stedet for å pugge den endelige formel i Setning 10.1.3, s. 496.

Vi får nå:

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{\cot x}\right) = \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} \quad \text{som gir:}$$

$$y e^{\cot x} = \int \frac{e^{\cot x}}{\sin^2 x} dx = -e^{\cot x} + K$$

$$\underline{y = -1 + K e^{-\cot x}}$$

10.2 <u>Oppgave 11, s. 506</u>

Vi observerer først at det i 3 minutter renner inn 6 l. vann som inneholder