Løsningsforslag øving 4:

2.6.13: Induksjonsbevis

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

Høyere ordens deriverte:

$$f'(x) = -x^{-2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3}$$

$$f^{(3)}(x) = -2 \cdot 3 x^{-4} = -6x^{-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)} \qquad (*)$$

Skal vise $(*)$ ved hjelp av induksjon:

Trinn 1: Verifiser at $(*)$ stemmer for $n = 1$:

Direkte derivasjon gir $f'(x) = \underline{-x^{-2}}$.
Formelen gir $f^{(1)}(x) = (-1)^1 1!\, x^{-(1+1)} = \underline{-x^{-2}}$

Trinn 2: Induksjonshypotesen:

Antar at $(*)$ er sann for $n = k$, dvs $\underline{f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\, x^{-(k+1)}}$

Trinn 3: Vise at antagelsen i Trinn 2 medfører at $(*)$ også er sann $n = k+1$:

Deriverer $f^{(k)}(x)$ (fra antagelsen i Trinn 2) mhp x for å finne $f^{(k+1)}(x)$:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k!\,\big((-1)(k+1)\big)\, x^{-(k+1)-1} = \underline{(-1)^{k+1}(k+1)!\, x^{-(k+2)}}$$

Sammenlikner med $(*)$, med $n = k+1$:

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1}(k+1)!\, x^{-(k+1+1)} = \underline{(-1)^{k+1}(k+1)!\, x^{-(k+2)}}$$

Vi ser at uttrykkene for $f^{(k+1)}(x)$ er like.

Dette gir at $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$ stemmer for alle (heltall) $n \geq 1$.

$\square$