**Norges teknisk–**
**naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



# Løsningsforslag, midtsemesterprøve MA1101, 5.oktober 2010

## Oppgave 1

Løs ulikheten

$$x + 6 \leq \frac{5}{x+2}$$

**Løsningsforslag:** Strategien er å

1. Flytte over (sammenlikne med 0)
2. Felles brøkstrek
3. Faktorisere
4. Fortegnsskjema

$$\begin{aligned}
x+6 &\leq \tfrac{5}{x+2} \\
x+6-\tfrac{5}{x+2} &\leq 0 \\
\tfrac{(x+6)(x+2)-5}{x+2} &\leq 0 \\
\tfrac{x^2+8x+7}{x+2} &\leq 0 \\
\tfrac{(x+7)(x+1)}{x+2} &\leq 0
\end{aligned}$$

Nå bør vi tegne fortegnsskjema, alle faktorer skal med. Resultatet gir at ulikheten har løsning for $x \in (-\infty, 7]$ og $x \in (-2, -1]$.

**Kommentar:** Mange får til denne oppgaven. Det er noen som multipliserer opp nevner uten å ta hensyn til fortegn, og det er mange som er unøyaktige med hensyn til om endepunktene på intervallene dere kommer fram til skal være med eller ikke.

**Oppgave 2**

Vis at likningen $e^x = x + 2$ har nøyaktig én løsning på intervallet $[0, 3]$. Kan likningen ha flere løsninger på andre intervall?

**Løsningsforslag:**

Vi definerer funskjonen $h(x) = e^x - x - 2$. Da ser vi at å vise at likningen $e^x = x + 2$ er det samme som å vise at $h(x)$ har et nullpunkt.

Vi har $h(0) = e^0 - 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$, mens $h(3) = e^3 - 3 - 2 = e^3 - 5 < 2^3 - 5 = 3 > 0$. Siden $h$ er en kontinuerlig funskjon, garantere nå skjæringssetningen (mellomverdisetningen) at det finnes *minst* et punkt $c$ på intervallet $[0, 3]$ hvor $h(c) = 0$.

Vi ser på $h'(x) = e^x - 1$. Denne er 0 for $x = 0$, positiv for $x > 0$ og negativ for $x < 0$. Dette betyr at $h$ er *stigende* på intervallet $[0, 3]$, og kan dermed ha *høyst* ett nullpunkt der.

Siden $h$ *synker* på intervallet $(-\infty, 0]$ kan den ha høyst ett nullpunkt på dette intervallet. Da $h(0) < 0$ og $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \infty$ gir skjæringssetningen at den har nøyaktig ett nullpunkt også her. På intervallet $(3, \infty)$ er $h$ stigende, og siden $h(3) > 0$ har den ingen nullpunkt på dette intervallet.

**Kommentar:** Dere skal referer til teormet som brukes for å garantere mist ett skjæringspunkt!

**Oppgave 3**

Finn likningen for tangenten til $g(x) = \ln x^2$ som er parallell med linja $y = 4x - 1$.

**Løsningsforslag:**

Siden linja $y = 4x - 1$ har stigningstall $m = 4$ trenger vi en tangent som også har stigningstall 4. Stigningstallet til tangentene til $g$ er gitt ved den deriverte. Løser derfor $g'(x) = 4$:

$$\begin{aligned} g'(x) = \tfrac{1}{x^2} \cdot 2x &= 4 \\ \tfrac{2}{x} &= 4 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Tangenten med stigningstall 4 er altså plassert i punktet $(\frac{1}{2}, g(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \ln(\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2}, -\ln 4)$ på grafen. Likningen for tangenten er da $y = 4x - 2 - \ln 4$.

**Oppgave 4**

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{for } x < 0 \\ \sqrt{x^2+8x} - x + 3 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

**a)** Er $f$ kontinuerlig for $x = 0$?
Avgjør om $f$ har noen horisontale eller vertikale asymptoter.

**Løsningsforslag:**

Funksjonen er kontinuerlig for $x = 0$ dersom grenseverdien fra begge sider når vi nærmer oss 0 er lik funksjonsverdien i 0.

Vi har

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3\frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$$

Merk at vi her har benyttet den kjente(?) grenseverdien $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$, samt at når $x \to 0$, så vil også $3x \to 0$. Videre har vi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+8x} - x + 3 = 3 = f(0)$$

Dermed er $f$ kontinuerlig for $x = 0$.

Siden $f$ er definert og kontinuerlig for all $x \in \mathbb{R}$ kan den ikke ha noen vertikale asymptoter. Vi sjekker for horisontale asymptoter ved å se hva som skjer når $x$ går mot $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sin 3x}{x} = 0,$$

siden nevneren går mot (minus) uendelig og telleren er begrenset (av $\pm 1$).

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+8x} - x + 3 = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+8x}-x)(\sqrt{x^2+8x}+x)}{\sqrt{x^2+8x}+x} + 3$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+8x-x^2}{\sqrt{x^2+8x}+x} + 3 = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x(\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1)} + 3 = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{\sqrt{1+\frac{8}{x}}+1} + 3 = \frac{8}{2} + 3 = 7$$

Funksjonen har altså to horisontale asymptoter, både $y = 0$ og $y = 7$.

**b)** Vis at på intervallet $[0, \infty)$ er $f$ en-til-en og har følgelig en inversfunksjon $f^{-1}$ her. Finn $(f^{-1})'(5)$.

**Løsningsforslag:**

Det er mange måter å vise at en funksjon er en-til-en på. Vi kan finne inversfunskjonen, eller vi kan vise at $f$ er enten bare stigende eller bare synkende på det aktuelle intervallet. Her er begge deler mulig, velger det siste

For $x > 0$ gjelder $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+8x}} \cdot (2x+8) - 1 = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}} - 1$. Vi sjekker om $f'$ har nullpunkt på intervallet:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}} - 1 &= 0 \\
\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}} &= 1 \\
x+4 &= \sqrt{x^2+8x} \\
(x+4)^2 &= x^2+8x \\
x^2+8x+16 &= x^2+8x \\
16 &= 0
\end{aligned}
$$

Vi ser at vi får en umulighet, altå har ikke $f'$ nullpunkt på intervallet. Ved å sette inn en vilkårlig $x$-verdi større enn 0 ser vi at $f'$ er positiv for alle $x > 0$, altså er funksjonen strengt stigende her, og er følgelig en-til-en.

For å finne $(f^{-1})'(5)$ uten først å ha funnet funskjonsutrykket for $f^{-1}$, benytter vi sammenhenen $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, der sammenhengen mellom $x$ og $y$ er gitt ved $f(x) = y$. Siden vår $y = 5$ trenger vi å bestemme $x$ slik at $f(x) = 5$. Her kan vi prøve oss frem, og se at $x = 1$ gir $f(1) = \sqrt{1+8} - 1 + 3 = 5$, eller vi kan løse ved regning:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+8x} - x + 3 &= 5 \\
\sqrt{x^2+8x} &= x+2 \\
x^2+8x &= x^2+4x+4 \\
4x &= 4 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Dermed blir $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{5}{3}-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

**Oppgave 5**

**a)** Skriv opp sekantsetningen (også kalt middelverdisetningen eller The Mean-Value Theorem). (Bevis kreves ikke.)

**Løsningsforslag:**

Sekantsetningen sier følgende: La $f$ være en kontinuerlig funksjon på $[a, b]$, deriverbar på $(a, b)$. Da finnes et punkt $c \in (a, b)$ slik at $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

**b)** Vis at dersom $f$ er en kontinuerlig, deriverbar funksjon på hele $\mathbb{R}$ og $f'(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, så er $f$ konstant.

**Løsningsforslag:** La $a$ være et fiksert tall, hvor $f$ tar verdien $f(a)$. Vi ønsker å vise at $f(x) = f(a)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. For $x \neq a$ kan vi bruke sekantsetningen på $f$ på intervallet $[a, x]$ (eventuelt på $[x, a]$ dersom $x < a$). Dermed får vi

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$$