Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Midtsemesterprøve i fag MA1101, løsningsforslag

Fredag 09. oktober 2009

Oppgave 1

a) Utfør polynomdivisjonen

$$(4x^3 - 12x^2 - x + 3) : (x - 3)$$

Løsningsforslag:

$$\begin{array}{rrl}
4x^3 - 12x^2 & -x + 3 & : x - 3 = 4x^2 - 1 \\
\underline{-(4x^3 - 12x^2)} & & \\
 & -x + 3 & \\
 & \underline{-(x - 3)} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

b) Løs ulikheten

$$4x^2 - 16x + 15 < \frac{12}{x+1}$$

Løsningsforslag:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 16x + 15 &< \tfrac{12}{x+1} \\
\tfrac{(4x^2-16x+15)(x+1)-12}{x+1} &< 0 \\
\tfrac{4x^3+4x^2-16x^2-16x+15x+15-12}{x+1} &< 0 \\
\tfrac{4x^3-12x^2-x+3}{x+1} &< 0 \\
\tfrac{(4x^2-1)(x-3)}{x+1} &< 0 \\
\tfrac{4(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-3)}{x+1} &< 0
\end{aligned}$$

Fortegnsskjema:

		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3	
$x+\frac{1}{2}$	- - - -	- - -	- - -	0	———	———	———	———	———
$x-\frac{1}{2}$	- - - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———	———	———
$x-3$	- - - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———
$x+1$	- - - -	0	———	———	———	———	———	———	———
utrykk:	———	><	- - -	0	———	0	- - -	0	———

Løsningen blir derfor $x \in \{(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3)\}$.

Oppgave 2 Beregn grenseverdiene:

a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+\sqrt{x^2+3x}}$$

Løsningsforslag:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x\sin x}{1-\cos x}$$

Løsningsforslag:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5x\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x(1+\cos x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{5(1+\cos x)}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{5\cdot 2}{1} = 10$$

Oppgave 3

Vis at funksjonen $f(x) = x^9 + 13x^5 - 7$ har nøyaktig ett nullpunkt på intervallet $[-1, 1]$.

Løsningsforslag: Funksjonen er kontinuerlig overalt. Vi har at

$$f(-1) = (-1)^9 + 13(-1)^5 - 7 = -1 - 13 - 7 = -21,$$

mens

$$f(1) = 1 + 13 - 7 = 7.$$

Siden $f(-1) < 0 < f(1)$ har vi ved skjæringssetningen at det finnes minst ett tall $c \in (-1, 1)$ slik at $f(c) = 0$. Dermed har vi vist at f har *minst* ett nullpunkt på det oppgitte intervallet. Videre har vi $f'(x) = 9x^8 + 65x^4 \geq 0$ for alle x, og $f'(x) = 0$ kun for $x = 0$, så funksjonen er strengt voksende. Dermed kan f ha *maksimalt* ett nullpunkt. Konklusjonen blir at f har *nøyaktig* ett nullpunkt, og det ligger på intervallet $[-1, 1]$.

Oppgave 4

Bestem likningen til tangenten til kurven $xe^y + y \ln x = 1$ i punktet $(1, 0)$.

Løsningsforslag: Benytter implisitt derivasjon:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}(xe^y + y \ln x) &= \tfrac{d}{dx}(1) \\ e^y + xe^y y' + y' \ln x + y\tfrac{1}{x} &= 0 \end{aligned}$$

Setter inn for verdiene i punktet $(1, 0)$:

$$\begin{aligned} e^0 + 1e^0 y' + y' \ln 1 + 0\tfrac{1}{1} &= 0 \\ 1 + y' &= 0 \\ y' &= -1 \end{aligned}$$

Likningen for tangenten blir dermed $y = -1(x - 1) = 1 - x$.

Oppgave 5

Gitt funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

a) Vis at $f'(0) = 1$.

Løsningsforslag: Siden funskjonen har en egen forskrift for $x = 0$ som ikke gjelder utenfor $x = 0$ må vi bruke definisjonen av den deriverte for å finne $f'(0)$.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h + 2h^2 \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 1 + 2h \sin(\frac{1}{h}) = 1$$

Her har vi brukt at $2h \sin(\frac{1}{h})$ går mot 0 når h går mot 0, siden $\sin(\frac{1}{h})$ er en begrenset funksjon (kan evt vises ved hjelp av skviseteoremet).

b) Vis at alle intervall som inneholder $x = 0$ også inneholder punkt hvor $f'(x) < 0$. (Dette viser at selv om $f'(0) > 0$ så er ikke f voksende på noe intervall som inneholder $x = 0$.)

Løsningsforslag: Vi finner først den deriverte av f som gjelder utenfor $x = 0$:

$$f'(x) = 1 + 4x \sin(\frac{1}{x}) + 2x^2 \cos(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2}) = 1 + 4x \sin(\frac{1}{x}) - 2\cos(\frac{1}{x})$$

Vi skal vise at innenfor ethvert intervall rundt $x = 0$ så blir $f'(x)$ negativ i minst ett punkt innenfor intervallet. Ser at $\cos(\frac{1}{x}) = 1$ for $\frac{1}{x} = 2\pi \cdot k$ for alle heltall k, det vil si for $x = \frac{1}{2\pi \cdot k}$. Legger også merke til at dersom $\cos(\frac{1}{x}) = 1$ så er $\sin(\frac{1}{x})$ samtidig lik 0.

Så gitt et intervall $[-\delta, \delta]$, finn k_0 slik at $\frac{1}{2\pi \cdot k_0} < \delta$, det vil si velg $k_0 > \frac{1}{2\pi\delta}$. Da får vi for $x_0 = \frac{1}{2\pi \cdot k_0}$ at $f'(x_0) = 1 + 4x_0 \sin(\frac{1}{x_0}) - 2\cos(\frac{1}{x_0}) = 1 + 0 - 2 = -1$. (Intervallet trenger ikke nødvendigvis være symmetrisk om origo, ikke engang inneholde punkt på begge sider av origo, men argumentet blir helt tilsvarende.)