Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag, eksamen MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I, vår 2009

Oppgave 1

Funksjonen g er definert ved $g(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 1)$.

a) Finn eventuelle ekstremalpunkt (topp- og bunnpunkt) for g.

Løsningsforslag: Ekstremalpunkt kan vi ha der $g'(x) = 0$ (kritiske punkt), der $g'(x)$ ikke eksisterer (singulære punkt) og i eventuelle randpunkt til definisjonsmengden. Her er det bare kritiske punkt som er aktuelt.

Finner $g'(x)$ og løser $g'(x) = 0$:

$$g'(x) = -e^{-x}(x^2 + 4x + 1) + e^{-x}(2x + 4) = \underline{-e^{-x}(x^2 + 2x - 3)}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ -e^{-x}(x^2 + 2x - 3) &= 0 \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x+3)(x-1) &= 0 \\ \underline{x = -3} &\vee \ \underline{x = 1} \end{aligned}$$

Siden vi i oppgave b) skal finne evt. vendepunkt trenger vi den dobbeltderiverte av g. Velger derfor å bruke dobbeltderiverttesten for å avgjøre om de kritiske punktene er topp- eller bunnpunkt (eller ingen av delene). Alternativt kunne vi drøftet $g'(x)$ på et fortegnsskjema.

$$g''(x) = e^{-x}(x^2 + 2x - 3) - e^{-x}(2x + 2) = \underline{e^{-x}(x^2 - 5)}$$

$g''(-3) = e^{-(-3)}((-3)^2 - 5) = 4e^3 > 0$, så $(-3, g(-3)) = (-3, -2e^3)$ er et bunnpunkt.

$g''(1) = e^{-1}(1^2 - 5) = -4e^{-1} < 0$, så $(1, g(1)) = (1, 6e^{-1})$ er et toppunkt.

b) Finn eventuelle vendepunkt og asymptoter (horisontale og/eller vertikale) for g. Skisser grafen til g.

Løsningsforslag: Vendepunkt kan vi ha der $g''(x) = 0$. Vi fant utrykket for $g''(x)$ i a), løser derfor lik null:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 0 \\ e^{-x}(x^2 - 5) &= 0 \\ x^2 - 5 &= 0 \\ \underline{x = -\sqrt{5}} &\ \vee\ \underline{x = \sqrt{5}} \end{aligned}$$

For at dette virkelig skal være vendepunkt, må den dobbeltderiverte skifte fortegn i punktene. Velger her å sjekke ved å tegne fortegnsskjema for $g''(x)$.

		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$x - \sqrt{5}$	- - - - - - - - - -	- -	- - - - - - - - - -	0	————————
$x + \sqrt{5}$	- - - - - - - - - -	0	————————	——	————————
$g''(x)$	————————	0	- - - - - - - - - -	0	————————

Konkluderer med at g har vendepunkt både for $x = -\sqrt{5}$ og for $x = \sqrt{5}$.

Siden funksjonen er definert overalt, kan den ikke ha horisontale asymptoter. Vertikale asymptoter finner vi ved å sjekke hva som skjer med funksjonsverdien når x går mot $(\pm)$ uendelig:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(x^2 + 4x + 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 4x + 1}{e^x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x + 4}{e^x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(Ved $[\frac{\infty}{\infty}]$ er L'Hopitals regel benyttet.)

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x^2 + 4x + 1) = \infty$$

Konkluderer med at $g(x)$ har horisontal asymptote $y = 0$.

Skisse av grafen....

Oppgave 2

Løs de ubestemte integralene

a)

$$\int e^x \cos x \, dx$$

Løsningsforslag: Benytter delvis integrasjon (to ganger), og løser som en likning:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, dx &= e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx + C \\ 2 \int e^x \cos x \, dx &= e^x(\cos x + \sin x) + C \\ \int e^x \cos x \, dx &= \tfrac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + C_1 \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6} \, dx$$

Løsningsforslag: Her må vi faktorisere nevneren og benytte delbrøkoppspaltining på integranden før vi integrerer:

$$\begin{aligned} \tfrac{3x+4}{x^2+x-6} = \tfrac{3x+4}{(x-2)(x+3)} &= \tfrac{A}{x-2} + \tfrac{B}{x+3} \\ 3x+4 &= A(x+3) + B(x-2) = (A+B)x + 3A - 2B \end{aligned}$$

For at dette skal være sant for *alle* x, må vi ha $A + B = 3$ og $3A - 2B = 4$, som har løsning $A = 2$ og $B = 1$.

Dermed bli integralet:

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x-6} \, dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3} \, dx = 2\ln(x-2) + \ln(x+3) + C$$

Oppgave 3

En vanntank fremkommer ved at kurven $y = x^2$, $x \geq 0$, dreies om y-aksen.

a) Anta at tanken er fylt med vann til en høyde $y = h$ (målt i meter). Vis at da er volumet av vannet i tanken (målt i m^3) gitt ved $V = V(h) = \frac{\pi h^2}{2}$.

Løsningsforslag: Her er det lurt tegne en figur! Benytter skivemodellen for løse oppgaven. Velger å snitte parallellt med x-aksen, slik at skivene får tykkelse dy og areal πr^2. Volumet av en slik skive er $dV = \pi r^2 \, dy$. Vi ser at radien til en skive i høyde y er det samme som x-koordinaten til punktet (x, y) på grafen $y = x^2$. Siden vi har tenkt å integrere mhp y, må vi utrykke radien vha y også. Bruker likningen $y = x^2$ og finner at $x = \sqrt{y}$ $(x > 0)$.

Volumet blir da $V(h) = \int_0^h dV = \int_0^h \pi(\sqrt{y})^2 \, dy = \pi \int_0^h y \, dy = \pi[\frac{y^2}{2}]_0^h = \frac{\pi h^2}{2}$, hvilket skulle vises.

b) Vi tenker oss nå at tanken er tom, og at fylling av tanken med vann begynner ved tiden $t = 0$. Vann renner inn i tanken med konstant hastighet $1m^3$ pr minutt. Hvor fort øker vannhøyden i det øyeblikket vannhøyden er $0,3$ meter?

Løsningsforslag: Vi skal finne endringen i vannhøyde pr tidsenhet, dvs $\frac{dh}{dt}$, i det øyeblikket vannhøyden er $0,3$ meter. Vi kjenner endringen i volum pr tidsenhet, $\frac{dV}{dt} = 1m^3/\text{min}$. Fra a) har vi også en sammenheng mellom volum og høyde, som gjelder ved alle tidspunkt, nemlig $V(t) = \frac{\pi(h(t))^2}{2}$. Deriverer denne mhp t, husker kjerneregelen (både volumet og vannhøyden endrer seg med tiden!) og får:

$$\frac{dV}{dt} = \pi h(t)\,\frac{dh}{dt}$$

Setter inn de opplysningene vi kjenner om det tidspunket vi er interessert i, og løser for $\frac{dh}{dt}$:

$$\begin{aligned} 1 &= 0,3\pi\frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{0,3\pi} \end{aligned}$$

Vannhøyden øker altså med $\frac{1}{0,3\pi}$ meter pr. minutt.

Oppgave 4

Vis at funksjonen $f(x) = x^3 + 2x + 3$ har en inversfunksjon f^{-1}, definert på hele $\mathbb{R}$, og finn $(f^{-1})'(3)$.

Løsningsforslag: Det er ulike måter å vise at en funskjon har en invers på; man kan finne inversfunksjonen, vise at funksjonen er en-til-en, eller - som vi velger her - vise at funksjonen er strengt voksende eller strengt avtagende i hele sin definisjonsmengde.

Her har vi $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ for alle x, så funskjonen er strengt voksende på hele $\mathbb{R}$, og har derfor en inversfunksjon f^{-1} definert på hele verdimengden til f. Verdimengden til f er $\mathbb{R}$.

For å finne $(f^{-1})'(3)$ bruker vi sammenhengen $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, der $y = f(x)$. Først må vi altså finne x slik at $f(x) = 3$: Vi har $x^3 + 2x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0$. Dermed blir

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Oppgave 5

Finn den løsningen av differensiallikningen

$$y' + xy = x$$

som går gjennom punktet $(-2, 2)$.

Løsningsforslag: Vi finner først den generelle løsningen av differensiallikningen ved hjelp av metoden med integrerende faktor.

Vi har $\mu(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$, så den integrerende faktoren blir $e^{\mu(x)} = e^{\frac{x^2}{2}}$. Multipliserer gjennom likningen, integrerer på begge sider og løser ut for funksjonen y:

$$\begin{aligned}
(y' + xy)e^{\frac{x^2}{2}} &= x\,e^{\frac{x^2}{2}} \\
(y\,e^{\frac{x^2}{2}})' &= x\,e^{\frac{x^2}{2}} \\
y\,e^{\frac{x^2}{2}} &= \int x\,e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = e^{\frac{x^2}{2}} + C \\
y &= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C) = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}
\end{aligned}$$

Så bestemmer vi konstanten C ved å kreve at løsningen skal gå gjennom punktet $(-2, 2)$:

$$2 = 1 + Ce^{-\frac{(-2)^2}{2}} = 1 + Ce^{-2} \Rightarrow C = e^2$$

Lsningen vi søker er dermed $y = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}+2}$.

Oppgave 6

Gi et ϵ-δ-argument (dvs. bruk den formelle definisjonen av grenseverdi) til vise at

$$\lim_{x\to 1}(5 - 2x) = 3.$$

Løsningsforslag: Gitt vilkårlig $\epsilon > 0$. Vi må finne et tall $\delta > 0$ (som sannsynligvis vil avhenge av ϵ) slik at når $0 < |x - 1| < \delta$, så er $|(5 - 2x) - 3| < \epsilon$.

For alle x gjelder $|(5 - 2x) - 3)| = |2 - 2x| = 2|x - 1|$. Ut fra dette velger vi $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Da har vi nemlig at for alle x som oppfyller $|x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$ så vil $|(5-2x)-3| = 2|x-1| < 2\delta = 2(\frac{\epsilon}{2}) = \epsilon$, og oppgaven er løst.

Oppgave 7

Bruk sekantsetningen (The Mean Value Theorem) på funksjonen $y = \arctan x$ til vise at for alle $x > 0$ gjelder ulikheten

$$\arctan x > \frac{x}{1+x^2}.$$

Løsningsforslag: Sekantsetningen sier at hvis f er en kontinuerlig funksjon på et lukket intervall $[a,b]$, og f er deriverbar på det åpne intervallet (a,b), så finnes (minst) et punkt $c \in (a,b)$ slik at $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Funksjonen $y = \arctan x$ er kontinuerlig og deriverbar overalt, og $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Velger intervallet $[0,x]$. Da finnes ved sekantsetningen et tall $c \in (0,x)$ slik at

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2}.$$

Men $\arctan 0 = 0$, og siden $0 < c < x$ har vi $\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$. Dermed får vi

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}.$$

Multipliserer opp med $x(> 0)$, og får resultatet som skulle vises.