Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt: Heidi Dahl
Telefon: 735 50256

Eksamen i fag MA1101/MA6101 Grunnkurs i analyse I

Bokmål
Tirsdag 16. desember 2008
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Kalkulator HP30S eller Citizen SR-270X
Vedlagte formelark for MA1101/MA6101

Alle svar skal begrunnes. Lykke til!

Sensur faller 16. januar 2009

Oppgave 1 Funksjonen g er definert ved $g(x) = x^6 - 3x^2 + 1$.

a) Finn alle lokale og globale maksimum- og minimumspunkt for g.

b) Skriv opp mellomverdisetningen (også ofte kalt skjæringssetningen eller The Intermediate-Value Theorem). Bevis kreves ikke.

c) Vis at likningen $x^6 - 3x^2 + 1 = 0$ har nøyaktig to løsninger på intervallet $[-1, 1]$.

Oppgave 2 Torill er ute og flyr med dragen sin. Dragen er festet i enden av en 20 meter lang snor. Et vindkast griper fatt i dragen og blåser den slik at vinkelen mellom snora og horisontalplanet øker med en hastighet på $\frac{1}{40}$ radianer pr. sekund. Hvor fort øker dragens høyde over bakken i det øyeblikket vinkelen er $\frac{\pi}{3}$? Vi antar at Torill står helt i ro og at snora som dragen er festet i er stram til enhver tid.

Oppgave 3

a) Løs det ubestemte integralet

$$\int \frac{x^2+3x}{(x^2+4x+5)(x+1)}\,dx.$$

b) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{x+3}{(x^2+4x+5)(x+1)}.$$

c) Finn alle løsninger av differensiallikningen

$$y'' - 5y' + 6y = 12x.$$

Finn så den løsningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $y(0) = \frac{5}{3}$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 4 Funksjonen f er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{2}x} + A & \text{for } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{x} & \text{for } -\frac{1}{8} \leq x < 0 \\[2ex] \dfrac{\int_0^{8x+1} e^{t^2}\,dt}{B(x+\frac{1}{8})} & \text{for } x < -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

a) Bestem A og B slik at f blir en kontinuerlig funksjon på hele $\mathbb{R}$.

b) La nå $A = 4$. Området i xy-planet avgrenset av x-aksen, grafen til f og linjene $x = 0$ og $x = 2$ roteres om y-aksen. Tegn en figur og beregn volumet av omdreiningslegemet som oppstår.

Oppgave 5 Anta at f er en kontinuerlig funksjon på intervallet $[a, b]$, og at f har en maksimalverdi for et punkt $c \in (a, b)$. Vis at dersom $f'(c)$ eksisterer, så må $f'(c) = 0$.
(Hint: Bruk definisjonen av den deriverte.)