

Oppg 1 a) f er deriverbar i \mathbb{R} . Da vil f vokse i $[a, b]$ om $f' > 0$ i $]a, b[$ og avta om $f' < 0$.

$$f'(x) = (2-x)e^x - e^x = (1-x)e^x$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{net} \quad 1-x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 1$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{net} \quad 1-x < 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1.$$

Så: f vokser i $] -\infty, 1[$, avtar i $]1, \infty[$.

b) Siden f er deriverbar i \mathbb{R} , finnes ^{ent.} ekstremalverdier der

$$f'(x) = 0. \quad \text{Dvs:}$$

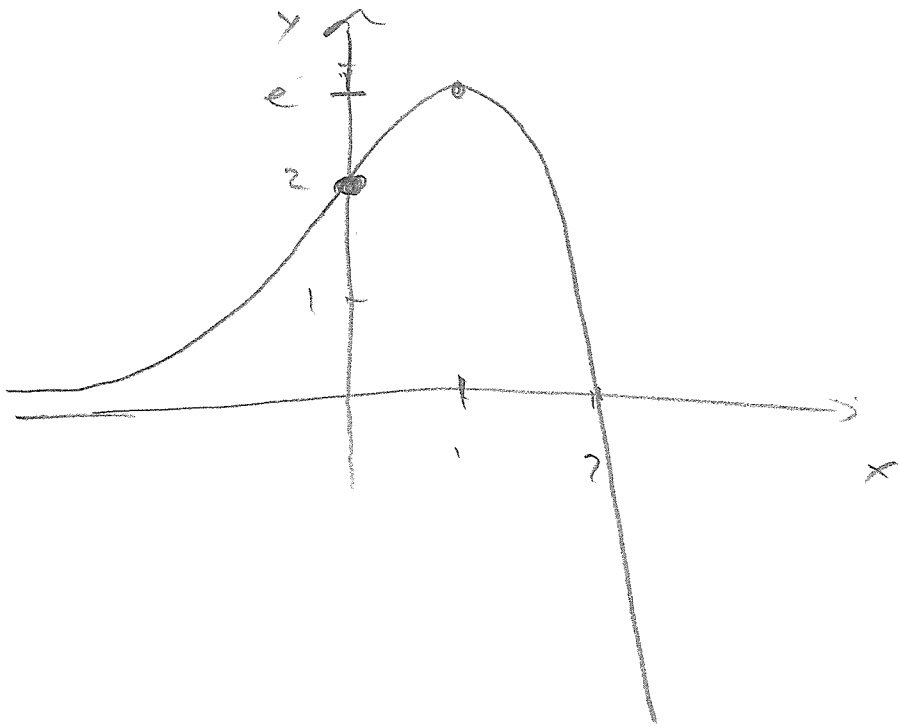
$$f'(x) = (1-x)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Siden $f'(x) > 0$ i $] -\infty, 1[$ og $f'(x) < 0$ i $]1, \infty[$ net $x=1$ gir absolutt maksimum.

$f(1) = (2-1)e^1 = e^1$ er altså absolutt maks for f . Ingen lok. min. verdier. (Horis. asymptote:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2+x}{e^x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Så $y=0$ er horis. asymptote.)



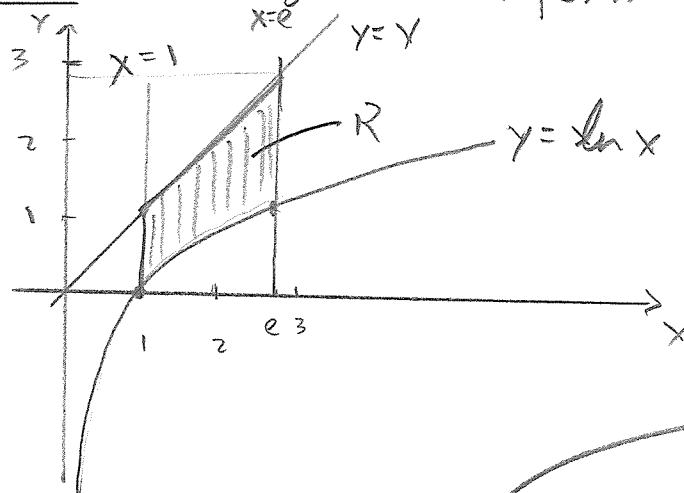
$$c) f''(x) = (1-x)e^x - e^x = -xe^x.$$

Kvies at $y=f$ er løsnig ved å sette ein i ligningen:

$$\begin{aligned} f'' - 2f' + f &= -xe^x - 2(1-x)e^x + (2-x)e^x \\ &= -xe^x - 2e^x + 2xe^x + 2e^x - xe^x \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Det går også an å løse den oppgitte ligningen på den vanlige måten, men det er jo ganske tungvint)

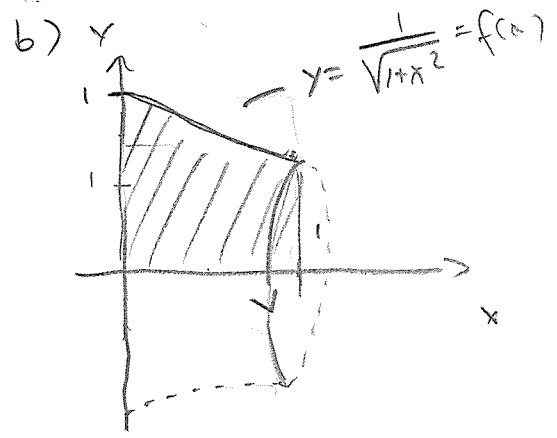
Oppg. 2 a) Tegner skisse først:



Vi vil altså finne arealet av den skravete området R.

$$\begin{aligned} \text{Area} R &= \int_1^{e^3} (x - \ln x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \ln x + x \right]_1^{e^3} \\ &= \left(\frac{1}{2}e^2 - \underbrace{e \cdot \ln e + e} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 1 \cdot \ln 1 + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(e^2 - 3). \end{aligned}$$

(Minnerom $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
(bruk ent. delvis int.))



Her kan vi det seg at bruke trossnittmetoden. Volumet av ombeiningss-belegnet blir:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \pi [\arctan x]_0^1 = \pi (\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \pi \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Oppg. 3 a) Merk at

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{1-x} = \infty, \text{ Så } \lim_{x \rightarrow 1+} 2^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1+} 0$$

Da blir altså:

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3}{1+2^{1/(1-x)}} = \frac{3}{1+0} = \underline{\underline{3}}$$

b). Dette er et ubestemt uttrykk på formen $[0^\infty]$. Vi ser derfor

først på

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{\sin x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

(L'Hôpital's rule)

Merke:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= 0.$$

Da e^x ved kontinuitet,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sin x \ln x} = e^0 = 1.$$

Oppg. 4. Vet at $\frac{dA}{dt} = 2$

Dermed: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} g$ ($h=1$)

$$\theta = \tan \theta = \frac{1}{g} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{1}{g}$$

Vil finne: $\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (\frac{1}{g})^2} \cdot (-\frac{1}{g^2}) \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{-1}{(g^2 + 1)} \cdot \frac{dg}{dt}$$

Kjennetegn

$$A = \frac{1}{2} g \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dg}{dt} \Rightarrow \frac{dg}{dt} = 2 \frac{dA}{dt} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Når $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$ får vi derfor

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{\frac{1}{3} + 1} \cdot 4 = -\frac{4}{\frac{4}{3}} = -3.$$

Så vinkelen øker med -3 radianer pr. sek.
(egentlig: avtar med 3. -)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ betyr:

1) For ethvert pos. tall $A > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $0 < |x| < \delta \Rightarrow |g(x)| > A$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ betyr: for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at $0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon$.
 } det er dette vi skal vise !!!

Så ta en vilkårlig $\varepsilon > 0$, og la $A = \frac{M}{\varepsilon}$. Til denne A finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \underset{|g(x)|}{g(x)} > A.$$

Når $0 < |x| < \delta$ får vi derfor:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{g(x)} \leq \frac{M}{g(x)} < \frac{M}{M/\varepsilon} = \varepsilon.$$

M.o.o. det finnes en δ (som vi fikk fra $A = \frac{M}{\varepsilon}$) slik at når $0 < |x| < \delta$, så er

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \varepsilon,$$

som var det vi skulle bevise.

b). Det er ikke riktig.

$$\text{La } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Da er $|f(x)| \leq 1$ i hele \mathbb{R} .

La $g(x) \equiv 1$. Da er $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Men $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ finnes ikke. ///

NB: Oppg. 4 er uklart formulert; det burde ikke ha stått øker.