Eks. MA1101
17/12-04

Ⓐ

LØSNINGER:

#1 (a) Skjæringspunktene:

$$\frac{4}{x^2} = 5 - x^2$$

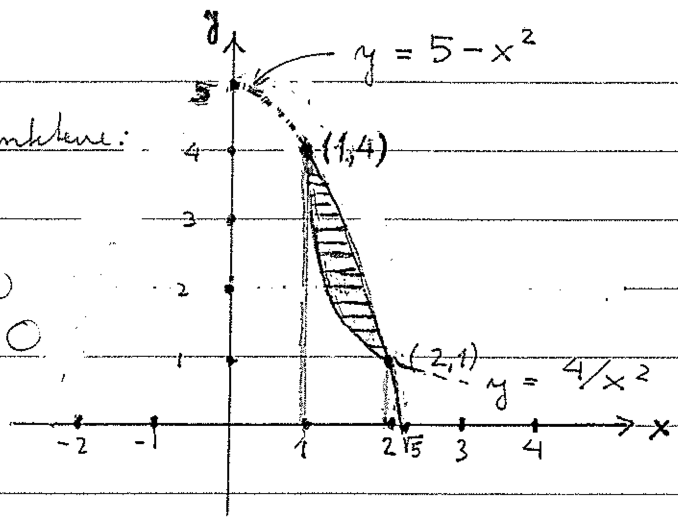
$$\Updownarrow$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2-1)(x^2-4) = 0$$

$\underline{x = 1}$ og $\underline{x = 2}$

$\underline{y = 4}$; $\underline{y = 1}$



(b) Arealet er gitt ved:

$$A = \int_1^2 \left[(5 - x^2) - \frac{4}{x^2}\right] dx$$

$$= \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 = \left[10 - \tfrac{8}{3} + 2\right] - \left[5 - \tfrac{1}{3} + 4\right]$$

$$= (12 - 9) + \left(-\tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{3}\right) = 3 - \tfrac{7}{3} = \underline{\tfrac{2}{3}}$$

#2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4 \cancel{\sin x} \cos x}{\cancel{\sin x}} = \underline{4}$$

#3 (i)

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + \left[-2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx\right] =$$

$$\underline{-x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + K}$$

(ii) Vi innfører $u = \sqrt{x}$ og får: $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

Dette gir:

$$\int \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx = 2\int x e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u^2 e^{-u} du$$

(B)

Fra (i) har vi da:

$$2\int u^2 e^{-u}\,du = \left[-2u^2 - 4u - 4\right]e^{-u} + K$$

Altså:

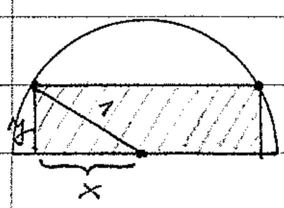
$$\int \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\,dx = \left[-2x - 4x^{\frac{1}{2}} - 4\right]e^{-\sqrt{x}} + K$$

som gir:

$$\int_1^2 \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\,dx = \left[-4 - 4\sqrt{2} - 4\right]e^{-\sqrt{2}} - \left[-2 - 4 - 4\right]e^{-1}$$

$$= \underline{10/e - \frac{8+4\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}}$$

#4



Arealet blir: $A = 2\cdot x\cdot y$

Dessuten har vi:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{eller}$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$A = A(x) = 2\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2}$$

Vi bestemmer først kritiske punkt:

$$A'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \cancel{2}\cdot x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= 2\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x^2) - x^2\right] = 2(1-x^2)^{-1/2}(1-2x^2)$$

$A'(x) = 0 \iff x = \pm 1/\sqrt{2}$, d.v.s. $x = 1/\sqrt{2}$

siden x er en lengde og derfor er ≥ 0.

Siden $A(0) = 0$ og $A(1) = 0$, og funksjonen ikke har noen singulære punkt og dessuten $A(x) \geq 0$ for alle $x \in [0,1]$, må $\underline{x = 1/\sqrt{2}}$ være det punkt som gir absolutt maksimum for funksjonen. Vi har dermed: $A_{maks} = A(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{1}. \quad \underline{x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \sqrt{2}}$$

Ⓒ

#5 (a) Ut fra fundamental-teoremet for analysen har vi:

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{d}{dx}\int^{x} \frac{dt}{t} = \frac{1}{x} \quad \text{for hver } x>0.$$

Siden funksjonen 1 er deriverbar for hver $x>0$ er den selvsagt også kontinuerlig i $]0,\infty[$.

(b) Utgangspunktet $x = f^{-1}(f(x))$ gir:

$$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx} f^{-1}(f(x)) = f^{-1\prime}(f(x))\cdot f'(x),$$

ut fra kjerneregelen. M.a.o. har vi:

$$\underline{f^{-1\prime}(y_0)} = f^{-1\prime}(f(x_0)) = \underline{1/f'(x_0)} \quad \text{siden } f'(x_0) \neq 0.$$

(c) $f'(x) = 1/x$ fra (a), og $f'(x) > 0$.
Siden f er strengt voksende har den en invers funksjon $x = \exp y$
Siden $f'(x_0) \neq 0$ for alle $x_0 \in]0,\infty[$, følger fra (b) at

$$\left.\frac{d}{dy}\exp(y)\right|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1/x_0} = x_0.$$

$$\ln x_0 = y_0 \iff x_0 = \exp y_0.$$

Altså:

$$\frac{d}{dy}(\exp y_0) = \exp y_0,$$

eller ekvivalent:

$$\underline{\frac{d}{dx}(\exp x) = \exp x}$$

for alle $x \in R(\ln) = \mathbb{R}$.

#6 (i) G

Begrunnelse: Hvis $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ eksisterer og $\lim_{x\to a} f(x)$ eksisterer, så eksisterer også: $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a}[(f(x)+g(x))-f(x)]$ ut fra en av grensesetningene. Men i følge vår antagelse eksisterer ikke $\lim_{x\to a} g(x)$. Altså kan ikke $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ eksistere. (Se TEST No 3 eller Oppg. 7, s. 96; ADAMS)

(ii) R

Vi antar at $f(-x) = -f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Siden $f'(x)$ antaes å eksistere for alle $x \in \mathbb{R}$ har vi:

$$\underline{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-f(-x)+f(-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = \lim_{x\to -x_0}\frac{f(x)-f(-x_0)}{x-(-x_0)} = \underline{f'(-x_0)}$$

(iii) R

Vi må bevise at for hvert tall $M>0$ finnes det et $\delta>0$ s.a. når $x\in \mathcal{D}(f)\cap\mathcal{D}(g)$ og $0<|x-a|<\delta$ så er $f(x)/g(x) > M$. Siden $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$ kan vi finne en $\delta_1 > 0$ s.a. når $0<|x-a|<\delta_1$ så er

$$f(x) > L/2$$

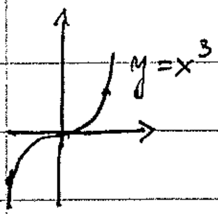
Videre, siden $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ og $g(x)>0$, finnes det en $\delta_2>0$ s.a. når $0<|x-a|<\delta_2$, så er $0<g(x)<L/2M$. Dermed har vi at om $\delta_0 = \min(\delta_1,\delta_2)$

så vil $0 < |x-a| < \delta_0$ medföre at

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{L}{2} \cdot \frac{2M}{L} = M$$

(iv) <u>G</u>

$f(x) = x^3$ er deriverbar i $x = 0$ med $f'(0) = 0$, men denne funksjonen har ikke lokalt ekstremum for $x = 0$



Altså er "hvis" galt!

(v) <u>R</u> Dette er Rolles setning! (s. 137, ADAMS)

<u>KOMMENTARER UT FRA HELHETSINNTRYKKET AV EKSAMENSBESVARELSENE:</u>

<u>OPPGAVE 1:</u>

(a) De aller fleste kom fram til en rimelig bra skisse av det aktuelle området. Generelt kan bemerkes at mange baserte seg for mye på lommeregner her. Spesielt var det mange som ikke sa noe om hvorfor skjæringspunktene ble (1,4) og (2,1).
Vanligvis må man for å bestemme skjæringspunktene mellom $y = f(x)$ og $y = g(x)$ sette $f(x) = g(x)$ og så löse denne ligningen. I dette tilfelle fant de fleste skjæringspunktene ut fra de punktene som ble regnet ut på kurvene - i og for seg greitt nok, men ingen god metode i det generelle tilfellet! (Hvorfor

kunne man f.eks. vite at det ikke fantes flere enn to skjæringspunkter i 1. kvadrant?)

(b) De fleste regnet riktig her, men <u>det virker som om parenteser er gått helt av moten i videregående skole!</u> Vi ser stadig f.eks.

$$\int_1^2 5-x^2 \ -\frac{4}{x^2}dx$$

eller

$$\int_1^2 5-x^2-\frac{4}{x^2}$$

Ser man ikke at parenteser betyr noe bestemt? Og at dx spiller en riktig rolle f.eks. ved substitusjon?

<u>OPPGAVE 2:</u>

Bra besvart hos de fleste - bortsett fra enkelte slurvefeil. Husker man ikke formelen:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

kan man selvsagt benytte L'Hôpitals regel en gang til for å komme fram til svaret.

<u>OPPGAVE 3:</u>

(i) Her hadde de fleste kommet fram til rett svar - bortsett fra at en del ikke hadde fått riktig fortegn på alle leddene. Noen få glemte integrasjons-konstanten og ble trukket litt for det!

(ii) Svært mange substituerte riktig her og så sammenhengen med (i). Noen kom fram til riktig ubestemt integral, men så ikke at (i) kunne benyttes - og

kastet dermed bort verdifull tid.
(NB! Sjekk alltid om det kan være sammenheng med tidligere punkter i samme oppgave. Det er ofte tilfelle i eksamensoppgaver.)
Den mest vanlige feilen i denne oppgaven var der hvor man forsökte med delvis integrasjon:

$$\int \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}} dx = -\sqrt{x} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} e^{-\sqrt{x}} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} e^{-\sqrt{x}} dx = \cdots$$

eller noe i den dur. Men ved derivasjon av $-\frac{2x}{3}^{3/2} e^{-\sqrt{x}}$ ser man straks at dette ikke er $e^{-\sqrt{x}}$. Dette er en grov feil!!
Ellers anbefales fölgende <u>husheregel</u> ved delvis integrasjon. Vi starter med

$$\int u(x) \cdot v(x)\, dx .$$

<u>Vi integrerer först den ene faktor og beholder den andre – minus integralet av den integrerte av den förste ganger den deriverte av den andre.</u> (Det synes som om metoden med å innföre u og dv ofte gir feil i praksis!)

<u>OPPGAVE 4:</u>
Först en alternativ framgangsmåte:
Vi kan ut fra vår figur innföre:

$$x = \cos\Theta \quad , \quad y = \sin\Theta .$$

Det sökte areal blir da:

$$A(\Theta) = 2\cos\Theta \sin\Theta = \sin 2\Theta \quad ; \; 0 \le \Theta \le \frac{\pi}{2} .$$

Den videre dröfting blir da svært enkel ut fra vårt kjennskap til sinus-funksjonen. I det aktuelle intervall er $A(\theta)$ störst og lik $\underline{1}$ når $\theta = \frac{\pi}{4}$.
Dette gir $x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Sidelengdene blir da: $x = 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}}$, $y = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

HYPPIG FEIL:

Ved derivasjon kommer man fram til at $A'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$ - og slutter uten videre at $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gir störst areal. Hvorfor ikke minst areal? Hvorfor oppnåes f.eks. ikke maksimum for et av endepunktene i det aktuelle intervall for x. (Denne tilleggsdröfting slipper man hvis man som vist ovenfor benytter det man vet om sinus-funksjonen. Men om man finner at $A'(\frac{\pi}{2}) = 0$ - må man også begrunne hvorfor $\theta = \frac{\pi}{2}$ gir maksimum og f.eks. ikke minimum.)

OPPGAVE 5:

Denne oppgaven ble gjennomgått på forelesning 10/11 og representerer en utdypning og forbedring av 3.3 Adams. Denne definisjon bygger på fundamentalteoremet. Oppgaven er formulert slik at den også skal kunne gjennomföres av de som av en eller annen grunn mistet nevnte forelesning. Punkt (b) er også be-

handlet i 3.1 ADAMS (gjennomgått på tidligere forelesning!)
Dette var eksamenssettets teori-oppgave.
En god del klarte denne oppgaven
- men noen som hadde forstått poenget, fikk litt trekk p.g.a. "ullen" framstilling.

OPPGAVE 6:

Det var forventet at de fleste skulle klare punktene (i) (gitt på test!),
(iv) (moteksemplet $y = x^3$ for $x = 0$ er gjennomgått flere ganger!) og (v) (kjent teorem i boken knyttet til sekant-setningen!)

NB! (iv) antyder at en del enda ikke har forstått hva "hvis og bare hvis" betyr. Dette er det viktig å tenke gjennom:

Er "hvis" det samme som $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?
Er "bare hvis" $\Leftarrow$ eller $\Rightarrow$?
Er "hvis og bare hvis" det samme som $\Leftrightarrow$?