MA0301
ELEMENTARY DISCRETE MATHEMATICS
NTNU, SPRING 2022

Løsningsforslag eksamen MA0301 våren 2022

For flervalgsoppgavene indikeres riktige alternativ med •. For hver av de oppgavene hvor det er forskjellige versjoner av oppgavene, har kun en av de blitt inkludert. De andre versjonene kan løses på lignende vis.

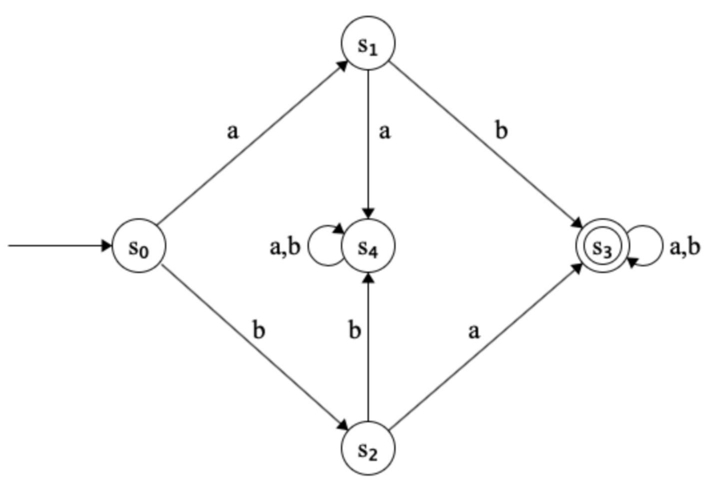
Exercise 1. *(4 poeng) Hvilke av følgende er sanne?*

(1) $\mathcal{L}((a \cup ba^*b)^*) = \mathcal{L}(\lambda \cup a^*ba^*ba^*)$
(2) $\mathcal{L}((a \cup ba^*b)^*) = \mathcal{L}((a^*ba^*ba^*)^*)$
(3) $(a \cup ba^*b)^* = (a^*ba^*ba^*)^*$
(4) $(a \cup b)^* = \{a, b\}^*$
(5) $\mathcal{L}(a^*ba^*ba^*) \subseteq \mathcal{L}((a^*ba^*ba^*)^*)$ •

Exercise 2. *(4 poeng) Hvilke av følgende er sanne?*

(1) *Ethvert regulært språk er komplementet av språket akseptert av en endelig tilstandsautomat.* •
(2) *Hvis $L \subseteq \mathcal{L}(M)$ for M en endelig tilstandsautomat, så er L et språk.* •
(3) *Hvis $L \subseteq \mathcal{L}(M)$ for M en endelig tilstandsautomat, så er L et regulært språk.*
(4) *Hvis $L \subseteq \Sigma^*$ og kardinaliteten til L er uendelig, så er L regulært.*
(5) *Hvis $L \subseteq \Sigma^*$ og kardinaliteten til L er endelig, så kan være L ikke-regulært.*

Exercise 3. *(8 poeng) Hva er språket akseptert av den følgende automaten?*



Date: April 28, 2023.

Løsning. Automaten aksepterer alle strenger over alfabet $\{a, b\}$ som begynner med ab eller ba, i.e.

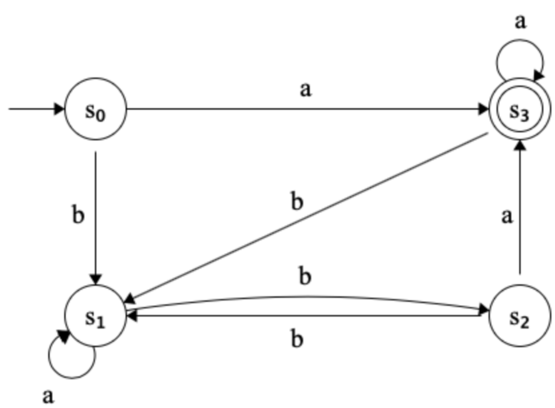
$$\mathcal{L}((ab \cup ba)(a \cup b)^*) = \{ab, ba\}\{a, b\}^*.$$

□

Exercise 4. *(8 poeng) Tegn en deterministisk automat med input alfabet $\{a, b\}$ og fire tilstander som aksepterer alle strenger med et partall antall b'er og som ender med en a.*

Løsning. En mulig automat er vist nedenfor. Selv hvis svaret aksepterer riktig språk, vil det for denne oppgaven bli trekt poeng blant annet for 1) hvor langt automaten er fra å være deterministisk; 2) at starttilstand eller finaltilstand ikke er angitt; og 3) at antallet tilstander er forskjellig fra 4.

□



Exercise 5. *(6 poeng) La P være en sammensatt proposisjon (compound proposition) slik at de eneste atomiske proposisjonene i P er q og r.*
Hvilken type proposisjon må P være for at

$$((q \vee r) \vee (\neg q \wedge \neg r)) \to P$$

skal være sann?

Løsning. Siden

$$(q \vee r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \equiv (q \vee r) \vee \neg(q \vee r)$$

ved DeMorgans lov, og det som er på høyrehåndssiden åpenbart er en tautologi, er det klart fra sanhetstabellen til implikasjon at P må være en tilfredsstillbar ("satisfiable") proposisjon for at

$$((q \vee r) \vee (\neg q \wedge \neg r)) \to P$$

skal kunne være sann. M.a.o. må P være en proposisjon som kan være sann.
Her har mange tolket oppgaven til å spørre om hva som skal til for at proposisjonen skal alltid være sann, i hvilket tilfelle P må være en tautologi. □

Exercise 6. *(7 poeng) Vis ved å bruke logikkens lover at negasjonen av*

$$\exists x(P(x) \to \forall y(Q(x) \wedge R(x,y)))$$

er ekvivalent med en av

$$\forall x(P(x) \wedge \exists y(Q(x) \to \neg R(x,y)))$$

$$\exists x(P(x) \to \ \exists y(Q(x) \vee \neg R(x,y)))$$

$$\forall x(P(x) \wedge \exists y(Q(x) \wedge \neg R(x,y)))$$

Løsning.

$$\begin{aligned}
\neg\exists x(P(x) \to \forall y(Q(x) \wedge R(x,y))) &\equiv \forall x\neg(P(x) \to \forall y(Q(x) \wedge R(x,y))) \\
&\equiv \forall x\neg(\neg P(x) \vee \forall y(Q(x) \wedge R(x,y))) \\
&\equiv \forall x(\neg\neg P(x) \wedge \neg\forall y(Q(x) \wedge R(x,y))) \\
&\equiv \forall x(P(x) \wedge \exists y\neg(Q(x) \wedge R(x,y))) \\
&\equiv \forall x(P(x) \wedge \exists y(\neg Q(x) \vee \neg R(x,y))) \\
&\equiv \forall x(P(x) \wedge \exists y(Q(x) \to \neg R(x,y)))
\end{aligned}$$

Her har vi brukt at $\neg\forall x \equiv \exists x\neg$, $p \to q \equiv \neg p \vee q$, DeMorgans lov, dobbel negasjon og så videre.
Vi ser at negasjonen av

$$\exists x(P(x) \to \forall y(Q(x) \wedge R(x,y)))$$

er ekvivalent med

$$\forall x(P(x) \wedge \exists y(Q(x) \to \neg R(x,y))).$$

□

Exercise 7. *(5 poeng) La A, B, C være mengder av endelig kardinalitet, og la $f\colon A \to B, g\colon C \to B$ og $h\colon C \to A$ være funksjoner.*
Hvis $g\colon C \to B$ er en bijeksjon og $|A| < |B|$, så er hvilke av følgende sanne?

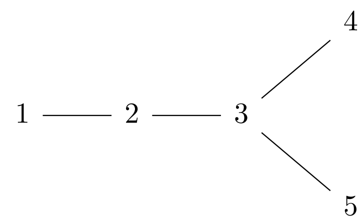
(1) *f er ikke injektiv.*
(2) *h er ikke bijektiv.* •
(3) *f er ikke surjektiv.* •
(4) *h er ikke surjektiv.*

Exercise 8. *(10 poeng) Tegn de urettede grafene assosiert til de følgende naboforholdsmatrisene ("adjacency matrices"):*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Er disse to grafene isomorfe? Begrunn svaret ditt.

Løsning. Henholdsvis blir dette

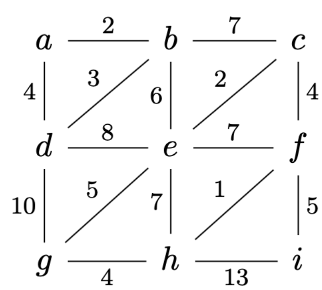


og

$$1 \;\text{———}\; 2 \;\text{———}\; 3 \;\text{———}\; 4 \;\text{———}\; 5\ .$$

De er ikke isomorfe siden den første har et hjørne av grad 3 mens den andre kun har hjørner av grad høyst 2.
Her deles poengene likt mellom å tegne grafene og å angi om de er isomorfe eller ei og hvorfor. Selv om en ikke begrunner svaret godt får en delvis uttelling. □

Exercise 9. *(10 poeng) Bruk Kruskals algoritme til å lage et minimalt utspennende tre for følgende vektede graf på hjørner $V = \{a, b, c, \ldots, h, i\}$:*



Løsning. Legg til i rekkefølge:

$$\{h, f\}, \{a, b\}, \{c, e\}, \{b, d\}, \{c, f\}, \{g, h\}, \{f, i\}, \{b, e\}.$$

Her deles poengene likt mellom å finne et minimalt utspennende tre og å vise stegene. □

Exercise 10. *(5 poeng) La $G = (V, E)$ være en urettet vektet graf. Som et steg i å løse et problem, trenger du å finne et utspennende tre som er minimalt blant de utspennende trærne som har et gitt hjørne $v \in V$ som et løv. Husk at et løv i et tre er et hjørne som har grad 1.*
Du skal endre Kruskals algoritme slik at den produserer slike trær, begrunn svaret ditt, og vis hvordan det fungerer ved å bruke et eksempel med 8 eller færre hjørner.

Løsning. Merk at selv om en begynner med en sammenhengende graf, er det mulig at $G - \{v\}$ blir usammenhengende. I slik et tilfelle er det ikke er mulig å finne et tre av den typen oppgaven ber om. Husk at $G - \{v\}$ er den største undergrafen av G som har hjørner $V - \{v\}$. Vi antar derfor at $G - \{v\}$ er sammenhengende. (En blir ikke trukket noe hvis en ikke har lagt merke til dette.)
Det er flere forskjellige måter en kan endre Kruskals algoritme på. En mulighet er å først kjøre Kruskals algoritme på $G - \{v\}$, for å så legge til den kanten i E av lavest vekt blant de som har v som endepunkt.
Et mulig eksempel er som følger:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash, "1"] \arrow[d, dash, "1"] & b \arrow[d, dash, "2"] \\ c \arrow[r, dash, "1"] & d \end{tikzcd}$$

Hvis vi lar $v = d$, får vi fra Kruskal på $G - d$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash, "1"] \arrow[d, dash, "1"] & b \\ c & \end{tikzcd}$$

som vi legger $\{c, d\}$ til for å få

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dash, "1"] \arrow[d, dash, "1"] & b \\ c \arrow[r, dash, "1"] & d \end{tikzcd} .$$

Det er noe trekk hvis en ikke har inkludert et eksempel, eller ikke forklarer hvordan en endrer algoritmen og kun demonstrerer den i et eksempel. □

Exercise 11. *(5 poeng) La $D = (V, R)$ være en rettet graf. Hvilke av følgende er sanne?*

(1) *R er en relasjon på V.* •
(2) *Hvis avstanden fra v til w for vilkårlige $v, w \in V$ er mindre enn 3, så er D ikke en DAG.*
(3) *Hvis D er en DAG, så finnes det $v, w \in V$ slik at $d(v, w)$ ikke er endelig.*
(4) *Hvis D er et poset, så er D en DAG.*
(5) *Hvis D er et poset, så er $(V, R - \{(x, x) \mid x \in V\})$ en DAG.* •
(6) *Hvis $|E| = \frac{1}{2}|V|(|V| - 1)$, så er D en turnering.*
(7) *Hvis D er en turnering, så er $|E| = \frac{1}{2}|V|^2$.*

Exercise 12. *(5 poeng) La $R := \{(n, m) | \, n - m = 3k, \, k \in \mathbb{N}\}$ være en relasjon på $\mathbb{Z}$. Hvilke av følgende er sanne?*

(1) *R er symmetrisk, transitiv og refleksiv.*
(2) *R er anti-symmetrisk og transitiv.* •
(3) *R er en partiell ordning.* •
(4) *Ingen av de ovenfornevnte.*

Exercise 13. *(5 poeng) Gi en partisjon av $\mathbb{Z}$ som består av 3 mengder, hvorav ingen har endelig kardinalitet.*

Løsning. La

$$P_0 := \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\},$$
$$P_1 := \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\},$$

og

$$P_2 := \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}.$$

En kan gjenkjenne P_1, P_2 og P_3 som alle de distinkte ekvivalensklassene til relasjonen på $\mathbb{Z}$ gitt av xRy for $x, y \in \mathbb{Z}$ hvis og bare hvis $x - y$ er delelig på 3. Fra teorien vet vi da at de utgjør en partisjon av $\mathbb{Z}$.
Det er noe trekk hvis en ikke begrunner hvorfor de mengdene en oppgir utgjør en partisjon av $\mathbb{Z}$, i.e. at en ikke begrunner at de parvist har tomt snitt og at unionen av de er $\mathbb{Z}$. $\square$

Exercise 14. *(5 poeng) La $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Er $\{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5), (5,5)\}$ en ekvivalensrelasjon på A?*
Hvis ikke, hva må legges til for at det skal bli en ekvivalensrelasjon?

Løsning. La $R := \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5), (5,5)\}$.
Vi ser at R er refleksiv, men ikke transitiv eller symmetrisk.
For transitiv, ser vi at $(2,4), (3,5)$ og $(2,5)$ må legges til.
Etter å ha lagt til $(2,4), (3,5)$ og $(2,5)$, ser vi at $(5,4), (4,3), (3,2), (5,3), (4,2)$ og $(5,2)$ må legges til for at relasjonen skal bli symmetrisk.
I utgangspunktet kunne det være at vi gjentatte ganger måtte lagt til flere ordnede par for at relasjonen skulle bli transitiv og/eller symmetrisk, men her er dette tilstrekkelig. $\square$

Exercise 15. *(5 poeng) Bruk binomialteoremet for å bestemme koeffisienten til x^8y^7 i utvidelsen av*

$$x^2y^3(3x - 2y)^{10}.$$

Vis utregningene dine.

Løsning. Siden vi har en faktor av x^2y^3 utenfor parentesen, er det leddet x^6y^4 vi er ute etter i binomialformelen $(a+b)^{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} a^i b^{10-i}$ med $a = 3x$ og $b = -2y$. M.a.o. blir koeffisienten $\binom{10}{6} 3^6 (-2)^4 = 2449440$. $\square$

Exercise 16. *(8 poeng) Du baker småkaker for å distribuere de i bokser som gaver.*

På det meste, vil du lage 42, men noen av de kan gå i stykker, bli brent eller ellers bli uegnet til å gi som en gave. Like fullt kan du anta at minst halvparten vil være egnede.

Du skal gi syv bokser som gaver.

På hvor mange forskjellige måter kan du distribuere småkaker i bokser hvis du kun bryr deg om å passe på at hver boks inneholder minst tre kaker?

Vis utregningene dine.

Løsning. Vi antar at mens boksene er distinkte, så er kakene essensielt identiske.
Etter å ha fordelt fordelt 3 kaker i hver av de 7 boksene, er det mellom 0 og 21 egnede kaker igjen.
Hvis vi legger til en åttende boks for de uegnede kakene, ser vi at antallet måter blir det samme som $\binom{21+8-1}{21}$. Dette teller det totale antallet muligheter over alle mulige antall egnede kaker.
En kan også observere at antallet egnede kaker er $21 + x$ for $0 \leq x \leq 21$ og at antallet måter for en gitt verdi av x blir da $\binom{x+7-1}{x}$ hvis en har fordelt 3 egnede kaker i hver av de 7 syv boksene. □