Predikatlogikk

Husk definisjonen av en refleksiv relasjon: En relasjon på A, ~~~~ si R, er en delmengde av A×A slik at $(x,x) \in R$ for alle x i A.

Veldig ofte i matematikk dukker det opp ord som "alle" og spesielt utrykket "for alle", samt utrykk som "det eksisterer".

En relasjon er for eksempel ikke symmetrisk om det eksisterer et par (x,y) i relasjonen, slik at (y,x) ikke er i relasjonen.

I predikatlogikk jobber vi med utsagn som "for alle" og "det eksisterer", ved å "utvide" utsagnslogikk med blant annet tegnene

$\forall$ ~ for alle

$\exists$ ~ det eksisterer.

Notasjon:

Vi bytter ofte "for alle" ut med $\forall$. "For alle $x \in A$" kan da skrives $\forall x \in A$.

Vi bytter ofte ut "det eksisterer" med $\exists$.

Til slutt merker vi oss at "det eksisterer nøyaktig én" ofte skrives $\exists!$.

Eksempel: La R være en relasjon på A.

* R er refleksiv $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ er $(x,x) \in R$

* R er symmetrisk $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in A$ ~~er~~ har vi $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

* R er ikke refleksiv $\Leftrightarrow$ $\exists x \in A$ slik at $(x,x) \notin R$

Vi har nå sett eksempler på hvordan kvantorene $\forall, \exists$ kan forenkle matematiske definisjoner og matematisk språk generelt.

Vi skal nå diskutere litt grundigere hvordan vi kan bruke kvantorene våre til å utvide matematisk logikk fra

utsagnslogikk $\rightarrow$ Predikatlogikk.

Betrakt setningen

"$x \cdot 2$ er et partall"

Er dette et utsagn? I så fall måtte setningen fått en sannhetsverdi. Er den Sann eller Usann? Avhenger av x. Tolker vi x som en ukjent, er setningen altså ikke et utsagn. Straks x er bestemt, får vi derimot et utsagn.

La nå

$P(x) \equiv x \cdot 2$ er et partall.

Da er $P(1)$ et <u>utsagn</u>, nemlig

"$2 \cdot 1$ er et partall"

$1 \cdot 2$

og $P(1)$ er sann. Er $P(x)$ sann for alle x?
Det spørs hvilke verdier vi tillater; setter vi $x = 1/2$ eller $x = \pi$, eller $x =$ "Hei" får vi i de første to tilfellene at $P(x)$ blir usann, og i det siste tilfellet får vi noe vi ikke enkelt kan tolke. Det er derfor slik at vi alltid velger et <u>univers</u> å trekke verdier fra:

La $\mathbb{N}$ være universet vårt. Da er

$$\forall x \, P(x)$$

<u>sann</u>.

Merk: $P(x)$ har en fri variabel, $\forall x P(x)$ har ingen <u>frie</u> variabler, er blitt et utsagn!

<u>Def</u> Et utrykk som blir et utsagn straks et gitt antall variabler er bestemt, kalles et <u>predikat</u>.
Et predikat med k frie variabler kalles et predikat av aritet k.

<u>Merk</u>: Gitt definisjonen over, kan vi tolke et <u>utsagn</u> som et predikat av aritet 0.

P er et predikat av aritet 1.

La $Q(x,y) \equiv x+y=3$

Si at vi tolker Q over universet $\mathbb{N}$, altså at vi bare tillater at x og y tar verdier i $\mathbb{N}$.

$\exists x\, Q(x,1)$ – sann

$\exists x\, Q(x,y)$ – et predikat av aritet 1 (!)

$\forall x\, \exists y\, Q(x,y)$ – USANN: $x=4$

Hadde vi hatt $\mathbb{Z}$ som univers ville siste blitt sann: La $y=3-x$

Rekkefølge på kvantorer

La $S(x,y) \equiv x < y$ over $\mathbb{N}$

Da er for eksempel $S(1,3)$ sann, $S(2,2)$ usann.

Betrakt nå utsagnet $\forall x \exists y\, S(x,y)$

Vi kan oversette dette til:

$$\underbrace{\text{for alle } x}_{\forall x}\ \underbrace{\text{finnes en } y \text{ slik at}}_{\exists y}\ \underbrace{x < y}_{S(x,y)}$$

Dette utsagnet er sant: Vi kan velge y "etter" x, så la $y = x+1$. ($y = x + i$ for $i > 0$)

Da er $x < y \equiv x < x+1$ sann.

Altså:
Uansett hvilken x som blir valgt, kan $S(x,y)$ tilfredsstilles ved å velge $y = x+1$: $S(x, x+1) \equiv x < x+1$ som er <u>SANN</u> (for alle x)

Vi ser nå på:

$\exists x \forall y\, S(x,y)$, altså:

$\underbrace{\text{Det finnes en } x \text{ slik at}}_{\exists x}\ \underbrace{\text{for alle } y}_{\forall y} \text{ er }\ \underbrace{x<y}_{S(x,y)}$

Dette er <u>ikke</u> sant. Det finnes ikke et naturlig tall (x) som er mindre enn alle naturlige tall y:

Hvis $x = 3$, velg for eksempel $y = 2$

Hvis $x = 0$, velg $y = 0$

$\exists x \forall y\, S(x,y)$ USANN.

$\exists x \forall y\, (x \leq y)$ SANN!

I sted betraktet vi altså:

$\forall x \exists y (x<y)$ og $\exists x \forall y (x<y)$

Hva med $\exists y \forall x (x<y)$?

$\underbrace{\text{Det finnes en } y \text{ slik at}}_{\exists y}$ $\underbrace{\text{for alle } x}_{\forall x}$ er $\underbrace{x<y}_{x<y}$

Usann: Det finnes ikke et naturlig tall større enn alle tall. (velg $x=y$ eller ~~x∧∧~~ $x=y+1$, for eksempel)

Negasjoner og kvantorer

La P være et predikat av aritet 1, over universet $U = \{1, 2, 3, 4\}$. Det betyr at

$P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ og $P(4)$ er 4 utsagn.

$\forall x\, P(x)$ betyr at $P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$

er sann.

Hva betyr $\neg \forall x\, P(x)$? Jo, at negasjonen

$$\neg (P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))$$

Er sann. Denne er ekvivalent (De Morgan) med $\neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$

Altså, "det finnes en x slik at $\neg P(x)$".

Generelt ser vi at

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

Vi har også

$$\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$$

Teorem

$$\neg \forall x (\cdots) \equiv \exists x \neg (\cdots)$$

og $\neg \exists x (\cdots) \equiv \forall x \neg (\cdots)$

Korollar (konsekvens):

$$P(x) \equiv \neg \neg \forall x\, P(x) \equiv \neg (\exists x \neg P(x))$$

Vi kan fjerne "$\forall$" med $\exists$ og $\neg$.