Predikatlogikk 2

Vi begynner med litt repetisjon.
"∀" leser vi "for alle", og tegnet kalles universalkvantor.
"∃" leser vi "det finnes", og kalles eksistenskvantoren.

∀ og ∃ er altså begge kvantorer.
Et predikat er ~~et~~ en setning som blir et utsagn straks en bestemt mengde variabler er bestemt.
Ariteten til et predikat er antallet variabler som må bestemmes for at predikatet skal ta en sannhetsverdi, altså bli et utsagn.

Eks:

Hvis P er et predikat av aritet 2, er $\forall x P(X,Y)$ et predikat av aritet 1, fordi Y må bestemmes for at $\forall x P(X,Y)$ skal ta en sannhetsverdi.

$\forall x \forall y P(X,Y)$ er et predikat av aritet 0, som er akkurat ~~tilsvarer~~ det samme som et utsagn.

Vi har tidligere diskutert hvordan man bør tolke kvantifiserte uttrykk, og sett at for eksempel rekkefølgen på kvantorene er viktig.

Å repetere notatene fra dette temaet kan være lurt.

Vi skal nå se på koblingen mellom relasjoner og predikater.

Relasjoner og predikater

La A være en mengde. En delmengde av A^n kalles en n-ær relasjon over A, eller en relasjon av aritet n over A.

En relasjon av aritet 2 kalles ofte binærrelasjon eller bare "relasjon".

Altså: Når vi ikke spesifiserer ariteten tenker vi stort sett på relasjoner av aritet 2, ~~Når det kan føre til mis~~

Når det er hensiktsmessig, spesifiserer vi ariteten.

Eks La $A \subseteq \mathbb{Z}^3$ være definert ved

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x + y = z\}$$

Så for eks $(1, 3, 4) \in A$, $(1, 1, 1) \notin A$.

Relasjoner av aritet n og predikater
av aritet n er tett koblet.

La R være ~~dt~~ en n-ær relasjon over A.
Vi kan se på R som et predikat ved å la $R(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$

__Eks__ La A være som over. Da er

$$A(x, y, z) \equiv (x, y, z) \in A \equiv x + y = z$$

Med $\mathbb{Z}$ som univers blir da for eks

$$\forall x \exists y A(x, y, 0) \text{ sann.}$$

(Bevis: La $y = -x$)

Omvendt tilsvarer det for ethvert predikat av aritet n over $\mathcal{U}$ en n-ær relasjon over $\mathcal{U}$:

~~La P være et predikat. Vi kan definere R_p~~

La P være et predikat av aritet n over et univers $\mathcal{U}$. Vi kan definere en relasjon R_p som følger:

$$R_p = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{U}^n \mid P(x_1, \dots, x_n)\}$$

Da er R_p, tolket som et predikat, ekvivalent til P:

$$R_p(x_1, \dots, x_2) \equiv P(x_1, \dots, x_n)$$

Husk at i utsagnslogikk starter vi med noen atomære formler, $A = \{P, Q, R\}$ for eksempel. Gitt en formel over A får den en ~~f~~ sannhetsverdi straks vi har valgt en tilordning, altså en funksjon $A \to \{0,1\}$.

Når vi har en ~~xx~~ predikatlogisk formel, eller setning, må vi på samme måte bestemme hva de ulike symbolene skal bety: variabler som $X, Y, \ldots$ er variabler, og trengs ikke tolkes, men symbolene som representerer predikater må tolkes eller konkretiseres.

Hvis funksjoner ~~f~~ opptrer i en ~~xx~~ predikatlogisk setning må også funksjonen bestemmes.

Eksempel:

La $\varphi = \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

En tolkning av φ består da av et valg av univers, samt et valg av predikat P. I praksis uttrykker vi ofte valget av P som en relasjon: I dette tilfellet av aritet 2.

Vi gir her to tolkninger:

1. La $U = \mathbb{Z}$ og $P = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$

   Da er φ usann.

2. La $U = \{1,2,3\}$ og $P = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$

   Da er φ sann.