Utsagnslogikk 2 — (kap 4 i RA)

Husk: Gitt en mengde atomære formler A er en <u>tilordning</u> et valg av sann/usann, evt. 0,1 for alle ~~formler~~ utsagn i A.

Straks en slik tilordning er valgt, kan vi bestemme sannhetsverdien til formler hvor kun atomære formler fra A opptrer. Vi sier at en tilordning (på A) bestemmer en <u>valuasjon</u>.

Alle valuasjoner bestemmes unikt av en slik tilordning.

Logisk konsekvens

Si at vi vet følgende:

$P, \quad P \wedge Q \to R, \quad \neg R$

Hva kan vi dedusere?

P og $P \wedge Q \to R$ gir $Q \to R$.

$\neg R$ gir da $\neg Q$.

$\neg Q$ er altså en konsekvens av konjunksjonen (og) av alt i mengden

$M = \{P, P \wedge Q \to R, \neg R\}$.

Vi skriver da $M \models \neg Q$

__Def__ La M være en mengde utsagnslogiske formler, og la F være en utsagnslogisk formel.

Hvis det for enhver valuasjon som gjør alt i M sant, er slik at også F blir sann, sier vi at F er en logisk konsekvens av M.

Eksempel: La $M = \{P, \neg P\}$. Det finnes ingen valuasjoner som gjør både P og $\neg P$ sann.

Vi har da $M \models F$ for enhver F!

Tautologier og motsigelser

La F være en utsagnslogisk formel.

Hvis det finnes en valuasjon som gjør F sann, kaller vi F oppfyllbar.

Hvis alle valuasjoner gjør F sann, kaller vi F en tautologi.

Hvis ingen valuasjoner gjør F sann, kaller vi F en motsigelse eller en kontradiksjon.

Eksempel: $P \vee \neg P$ tautologi

$P \wedge \neg P$ kontradiksjon.

$P \vee Q$ $\left[\begin{array}{l}\text{ikke tautologi} \\ \text{ikke kontradiksjon}\end{array}\right.$

La F være en tautologi. Hvorfor har vi da $\emptyset \models F$?

Når vi forenkler utsagnslogiske formler, kan vi erstatte tautologier og kontradiksjoner med symboler for Sann og Usann:

$$\top \sim \text{Sann}$$

$$\bot \sim \text{Usann.}$$

Eks:

$$
\begin{aligned}
(P \vee Q) \vee \neg P &\equiv (Q \vee P) \vee \neg P \\
&\equiv Q \vee (P \vee \neg P) \\
&\equiv Q \vee \top \\
&\equiv \top
\end{aligned}
$$

Obs: "Regelen" $P \vee Q \equiv Q \vee P$ kalles kommutativitet; vi sier at $\vee$ (og $\wedge$) er kommutativ. $\rightarrow$ er ikke kommutativ.

Uavhengighet

La F_1 og F_2 være to formler. Vi sier F_1 er uavhengig av F_2 hvis verken F_1 eller $\neg F_1$ er en (logisk) konsekvens av F_2.

$P \vee Q$ er uavhengig av $Q \vee R$:

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Hverken $P \vee Q$ eller $\neg(P \vee Q)$ er en konsekvens av F_2.

La F være en formel, og M en mengde formler. Vi sier at F er uavhengig av M hvis

$$M \not\models F \quad \text{og} \quad M \not\models \neg F.$$

La M være en mengde formler. Vi sier at M er en uavhengig mengde formler, hvis alt i M er uavhengig av alt annet i M. Altså, for enhver $F \in M$ har vi at $M \setminus \{F\} \not\models F$ og $M \setminus \{F\} \not\models \neg F$.

Eksempel: $\{P, Q, R \vee S\}$ er uavhengig.

$\{P, Q, P \wedge Q\}$ er <u>ikke</u> uavhengig:

$$\{P, Q, P \wedge Q\} \setminus \{P\} \models P$$

La nå A vare en endelig mengde atomære formler, si $|A| = n$.

La F vare en formel hvor alle atomære utsagn som opptrer er elementer i A. Hvordan kan vi sjekke om F er oppfyllbar?

En algoritme: Sjekk alle 2^n tilordninger. Kjenner ikke til "veldig mye" raskere algoritmer.

~~Noen ganger kan vi resonere at.~~

Hva med algoritmer for å sjekke om en formel er en tautologi?

En slik algoritme gir en algoritme for å sjekke om noe er oppfylbart:

F er oppfylbar hvis og bare hvis ¬F <u>ikke</u> er en tautologi.

Ergo; vi kjenner nødvendigvis ikke raske måter å se om noe er en tautologi på.