Utsagnslogikk

Betrakt setningen

P: "Alle rike nordmenn eier en Tesla"

Anta at P er sann. Hva kan vi utlede i situasjonene/premissene under?

1. Håvard er norsk, og eier ikke en Tesla.
2. Elsa er fransk, og eier ikke en Tesla.
3. Per er norsk og eier en Tesla.
4. Ståle er rik, men eier ikke en Tesla.

1: Håvard er ikke rik.

2: P forteller oss <u>ingenting</u> (nytt) om Elsa.

3: P forteller oss <u>ingenting</u> (nytt) om Per.

4: Ståle er <u>ikke</u> norsk.

Def Et utsagn er en påstand som enten er sann eller usann.

Eks:
* 2+2=5 (usann)
* Summen av to partall er et partall (sann)

Ikke utsagn:
* X+2
* Er alle primtall oddetall?

P fra over er også en påstand. Den er sann hvis det ikke finnes et moteksempel, altså en rik nordmann som ikke eier en Tesla.

Merk: Hvis alle nordmenn var fattige, så hadde P vært sann; det blir umulig å finne et moteksempel.

Formler

Vi vil gjøre "algebra" med utsagn.
Vi bruker da ofte bokstavene
P, Q, R, S, ... som variabler.

En variabel P kalles en atomær formel, fordi den består av et symbol alene.

La P, Q være to utsagn.

$P \vee Q$ leser vi "P eller Q".

$P \wedge Q$ leser vi "P og Q"

$P \rightarrow Q$ leser vi "Hvis P, så Q".

$\neg P$ leser vi "ikke P".

Merk: $P \vee Q$ blir da et <u>nytt</u> utsagn.

Vi kan bygge mer kompliserte <u>formler</u> og utsagn med disse reglene:

La P, Q, R være variabler/atomære utsagn. Vi kan for eksempel lage formlene

$$\neg P \wedge (Q \rightarrow R)$$

$$\neg((P \vee Q) \vee R)$$

OBS: Pass på parentes. For å få dette til, sett heller flere enn færre parentes.

$$(\neg P) \wedge Q \neq \neg(P \wedge Q)$$

$$(\neg P) \rightarrow Q \neq \neg(P \rightarrow Q)$$

Evaluering av formler

Si at P, Q er to utsagn vi kjenner sannhetsverdien til.

$P \vee Q$ er da <u>sann</u> om P eller Q er sann, altså om minst én av dem er sanne.

$P \wedge Q$ er <u>sann</u> om både P og Q er sann.

$\neg P$ er <u>sann</u> om P er <u>usann</u>.

$P \rightarrow Q$ er sann så lenge det <u>ikke</u> er slik at P er sann <u>og</u> Q er usann.

Hvorfor gir dette mening?

Hvis P, så Q betyr at i alle situasjoner hvor P er sann, så er Q også sann. Situasjonene hvor P er usann er irrelevant.
Det eneste som kan gå "galt" er altså at P er sann, men Q usann.

Def Hvis en påstand P er sann sier vi at sannhetsverdien til P er sann, og tilsvarende sier vi at en usann påstand har sannhetsverdi usann.

Vi lar 1 representere sann og 0 usann.

Eksempel: (oppgave 2.8 i RA)

La P = "Denne ~~setn~~ setningen har fem ord".

a) Hva er sannhetsverdien til P?

b) Skriv ned ¬P med ord. Hva er sannhetsverdien til ¬P?

a) Setningen er sann.

b) Kan være fristende å prøve:

Q: "Denne setningen har ikke fem ord"

Men Q er sann! ¬P er usann

8

For å skrive påstanden $\neg P$ kan vi

da heller skrive:

"Følgende er usant: "Denne setningen

har fem ord" "

Denne påstanden er USANN.

Tilordninger og sannhetsverditabeller

Si at vi ~~øn~~ ønsker å undersøke sannhetsverdiene til sammensatte formler som ~~refererer~~ er bygget opp fra en gitt mengde atomære utsagn. Vi kan da sette opp alle muligheter/tilordninger i en tabell:

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	~~$\neg P \wedge \neg Q$~~
0	0	0	0	1	~~1~~
0	1	1	0	1	~~0~~
1	0	1	0	0	~~0~~
1	1	1	1	1	~~0~~

Merk: Har vi n atomære utsagn, er det 2^n mulige tilordninger på disse.

Kolonne 3, 4 og 5 forteller oss hvordan vi skal regne/tolke sannhetsverdien til disjunksjoner ("eller", $\vee$), konjunksjoner ($\wedge$, "og") og implikasjoner ($\rightarrow$).

Mer kompliserte utsagn kan ofte forstås enklere med slike tabeller.

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \wedge R$	$(P \vee Q) \rightarrow (Q \wedge R)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Logisk ekvivalens

Def La P, Q være to utsagnslogiske formler, over en mengde atomære utsagn A. Hvis P og Q har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av de atomære formlene i A, sier vi at P og Q er logisk ekvivalente.

Eks: $(P \lor Q) \lor P \equiv P \lor Q$

$$(\Leftrightarrow)$$

$$P \lor Q \not\equiv P \land Q$$

$$P \lor \neg P \equiv Q \lor \neg Q$$

$$\neg\neg P \equiv P$$

Kan undersøkes i sannhetsverditabell.

Noen logiske lover

Vi kan lett sjekke at $P \vee Q \equiv Q \vee P$ og $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.

Men $P \rightarrow Q \not\equiv Q \rightarrow P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Ikke alltid lik verdi.

Men: $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

Teorem: Alle formler hvor vi bruker $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ kan skrives (ekvivalent) med tegnene $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Bevis: Bytt ut alle $(P \rightarrow Q)$ med $(\neg P \vee Q)$

De Morgans lov:

Vi har sett $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
Dette kalles De Morgans lov. I utsagnslogikk
har ~~vi~~ vi også en slik lov:

$$\neg(P \land Q) \equiv (\neg P) \lor (\neg Q)$$

$$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$$

Kan sjekke i tabell.

Konsekvens: $P \land Q \equiv \neg\neg(P \land Q)$

$$\equiv \neg(\neg P \lor \neg Q)$$

Altså, "$\land$" kan skrives ved hjelp av
$\neg$ og $\lor$.

Teorem For enhver utsagnslogisk formel P, skrevet med atomære formler og konnektivene $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ finnes det en formel Q skrevet med samme atomære formler og konnektivene $\{\neg, \vee\}$ slik at

$$P \equiv Q$$

Bevis: Bruk forrige teorem til å skrive om alle "$\rightarrow$". Skriv så om alle $\wedge$ ved De Morgans lov.

$\blacksquare$

Eksempel:

$$(P \to (Q \to R)) \land S \equiv$$

$$(P \to (\neg Q \lor R)) \land S \equiv$$

$$(\neg P \lor (\neg Q \lor R)) \land S \equiv$$

$$\neg(\neg(\neg P \lor (\neg Q \lor R)) \lor \neg S)$$

Vi har altså samme ekspressive kraft med $\{\lor, \neg\}$ som med $\{\lor, \land, \neg, \to\}$.