Mengdelære

Husk: mengder beskrives av elementene i dem. $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 2, 1, 3\}$

$\{\ \} = \emptyset$ kalles den tomme mengden.

Fakta: La A være en vilkårlig mengde da har vi: $\emptyset \subseteq A$, "$\emptyset$ er en delmengde av alle mengder".

Mengder kan inneholde andre mengder:

La $A = \{0, \{0\}, \emptyset, \{1, 2, 3\}, \{\{1\}\}\}$

A har 5 elementer. $\cancel{\emptyset \in A}$, $\cancel{\emptyset \subseteq A}$

Mengdebygger

Notasjon for å beskrive mengder.

~~Gitte~~

Gitt en mengde A, si at vi vil betrakte delmengden $B \subseteq A$ som inneholder alt i A som oppfyller et krav.

Dette kan vi skrive

$$\{x \in A \mid x \text{ oppfyller "krav"}\}$$

Eksempel: Husk at $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ kan deles på } 3\} = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

Noen viktige mengder:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de naturlige tallene.

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ heltallene.

$\cancel{\mathbb{Q} = \frac{a}{b}}$

$\mathbb{Q}$ er mengden brøker $\frac{a}{b}$ der $b \neq 0$ og

$a, b \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$ er alle relle tall. $\pi \in \mathbb{R}$

$-1 \in \mathbb{R}$ osv.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Kartesisk produkt

La A, B være to mengder.

Vi definerer $A \times B$ til å være mengden av alle **par** (x, y) der $x \in A$ og $y \in B$.

Eksempel: $A = \{1, 2\}$

$B = \{a, b, c\}$

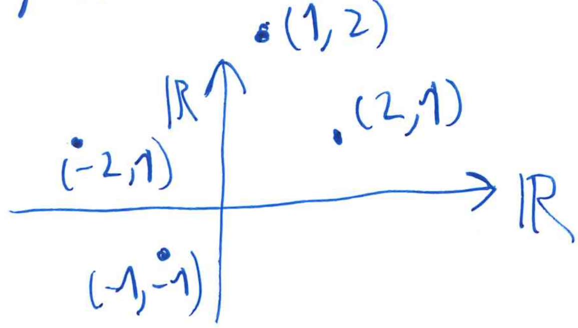
$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$$

Merk at $(1,a) \neq (a,1)$. ~~og (a,1)~~

$(a,1) \notin A \times B$, men $(a,1) \in B \times A$. Så

$A \times B \neq B \times A$.

Eksempel: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ er mengden av ~~punkt~~ punkter i planet.



Vi kan også betrakte ~~ordnen~~ ordnede 5 **tripler** (x, y, z) eller generelt ordnede **n-tupler** $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

~~Ordnede~~

Eks:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ er mengden av 4-tupler (x, y, z, t) der $x, y, z \in \mathbb{N}$ og $t \in \mathbb{Z}$

~~Eks: La $X = \{0, 1\}$.~~

Eks: La $A = \{0, 1\}$

La $B = \{(x, y, z) \in A \times A \times A \mid x \cdot y \cdot z = 0\}$

Hvor mange elementer i B?

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ ganger}}$$

Potensmengde

La $A = \{0,1\}$, og si at vi vil finne alle mengder B slik at $B \subseteq A$, altså alle delmengder ~~vat~~ av A:

Vi får
* $\emptyset \subseteq A$
* $\{1\} \subseteq A$
* $\{0\} \subseteq A$
* $\{0,1\} \subseteq A$

~~Dette er alle de.~~

Def Potensmengden til en mengde X, $P(X)$, er definert som mengden ~~av alle~~ som består av alle delmengder av X.

Eks: $P(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{0\}, \{0,1\}\}$

Eks: $P(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$

$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ← ikke tom!

Endelige og uendelige mengder.

En mengde kalles <u>endelig</u> om den har et endelig antall elementer, og <u>uendelig</u> ellers.

$\mathbb{N}$ er uendelig, $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ er endelig
$\{0, 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ er uendelig

<u>Teorem</u> La $X \subseteq \mathbb{N}$ være en endelig (del)mengde. Da har X et maks-element, eller $X = \emptyset$.

<u>Bevis</u>: Anta $X \neq \emptyset$. La $a_0 \in X$. Hvis a_0 ikke ~~er~~ et maksimalt element i X, la $a_0 < a_1$ og $a_1 \in X$. Hvis dette heller ikke er maksimalt kan vi videre betrakte

$$a_0 < a_1 < a_2, \text{ hvor } a_2 \in X.$$

Denne rekken må slutte, da X er endelig. Så vi må ende opp med ett maksimalt element til slutt. $a_0 < a_1 < \dots < a_i$

<u>Teorem</u> La $X \subseteq \mathbb{N}$ være ulik $\emptyset$. Da har X et <u>minste</u> element.

<u>Obs</u>: Vi tillater uendelige mengder X.

Bevis: La $a \in X$, og si $Y = \{b \in X \mid b \leq a\}$ ~~*~~ Y er en endelig mengde. På samme måte som vi fant et største element i en endelig ~~m~~ mengde kan vi finne <u>minste</u> element. Y har derfor et minste element, si a^*. Da må a^* være det minste elementet i X.

Merk: Ikke sant om vi bytter ut "minste" med ~~"~~ "største" i teoremet over.