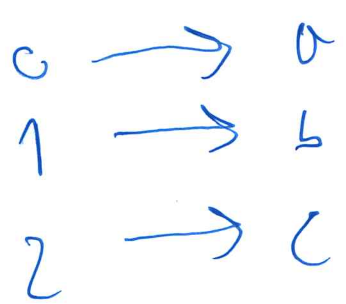
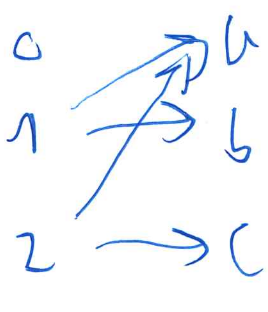
Relasjoner

Def La A, B være mengder.
En delmengde av $A \times B$ kalles en
relasjon fra A til B.

I tilfellet hvor $A = B$ kalles relasjonen
en relasjon **på** A.

Eksempel: La $A = \{0, 1, 2\}$ og $B = \{a, b, c\}$.
Da er $R_1 = \{(0,a), (1,b), (2,c)\}$ og
$$R_2 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,c)\}$$
to eksempler på relasjoner fra A til B.

R_1:


R_2:


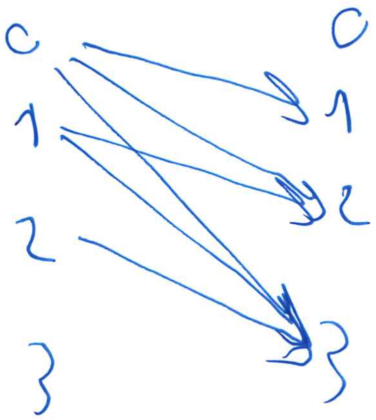
La $A = \{0, 1, 2, 3\}$

La $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x < y\}$

R er en relasjon på A.

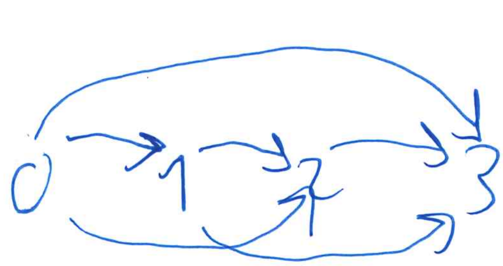
Vi kan tegne som i sted:

R:



Men unødvendig å tegne elementene i A mer enn én gang. Vi tegner derfor heller gjerne:

R:



I Eksempelet over er x relatert til y hvis $x < y$. Vi kan enkelt si at R er "mindre enn" relasjonen på mengden A.

Merk: Hvis $x < y$ og $y < z$, så har vi $x < z$. Altså, hvis x er relatert til y og y til z, så er x relatert til z. Denne egenskapen, som relasjonen R har, heter transitivitet.

Vi skal nå ~~dr~~ drøfte andre egenskaper en relasjon kan ha!

La R være en relasjon på en mengde A.

<u>Def</u>

* R er refleksiv hvis $(x,x) \in R$ for alle $x \in A$.
* R er symmetrisk hvis
$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$$
* R er transitiv hvis
$$(x,y) \in R \text{ og } (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$
* R er anti-symmetrisk hvis
$$(x,y) \in R \text{ og } (y,x) \in R \Rightarrow x = y$$

Eksempel: "$\leq$" er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk.

"$=$" er refleksiv, transitiv, symmetrisk og anti-symmetrisk.

"$<$" er transitiv og anti-symmetrisk. (!)

Eksempler La $A = \{0, 1, 2\}$

La $R_1 = \emptyset$

R_1 er ikke refleksiv; $(0,0) \notin R$

R_1 er symmetrisk.

(Hvis den ikke skulle vært symmetrisk, måtte det eksistert et moteksempel, altså et par $(x,y) \in R$ slik at $(y,x) \notin R$. Et slikt par eksisterer ikke.

R_1 er transitiv (igjen: umulig å finne moteksempel)

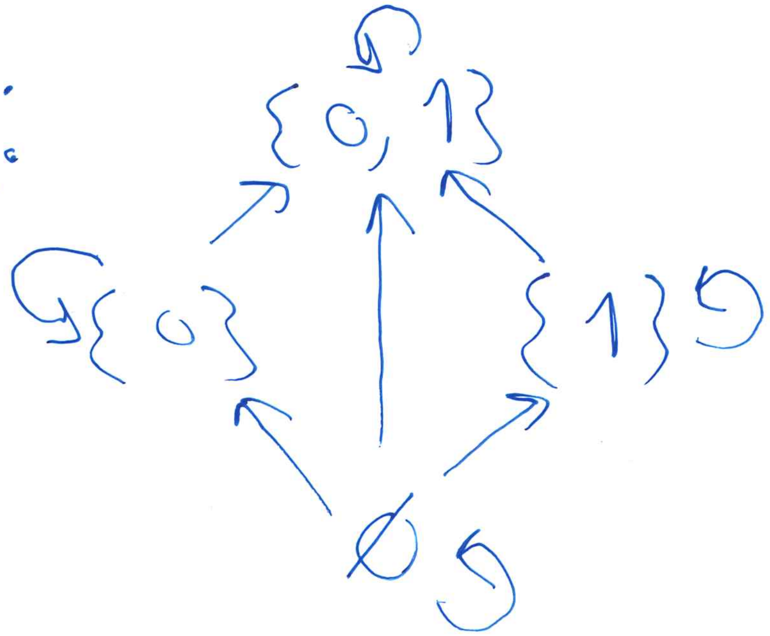
R_1 er anti-symmetrisk.

La $A = P(\{0,1\})$

La $R_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid x \subseteq y\}$

$A = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

R_2:



R_2 er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk.

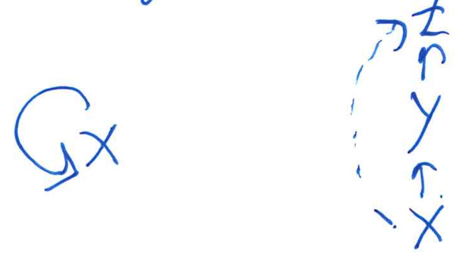
Samme egenskaper som "$\leq$"

Delvise ordninger

Vi så at "$\subseteq$" og "$\leq$" deler egenskapene refleksivitet, transitivitet og anti-symmetri.

En relasjon med disse 3 egenskapene kalles delvis ordning eller partiell ordning

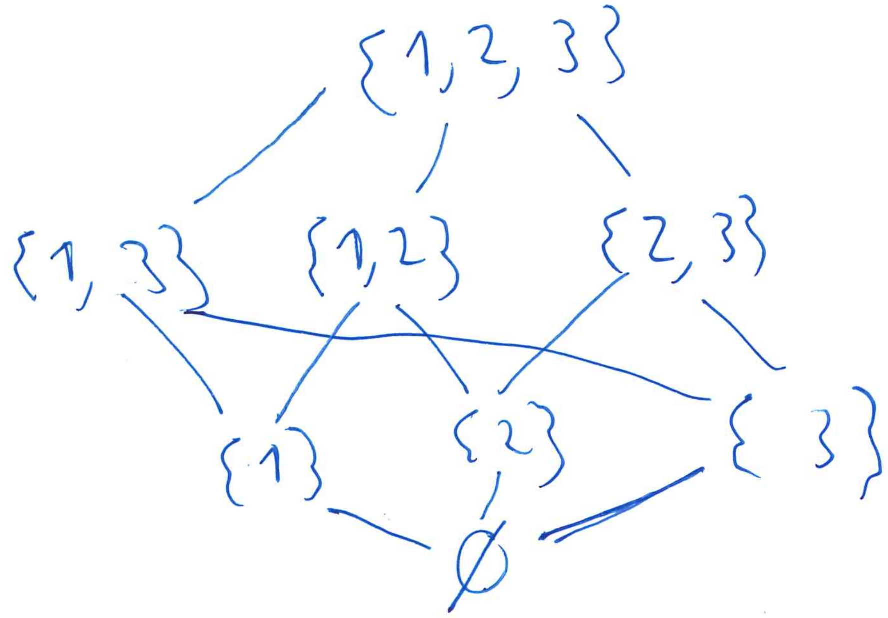
Partielle ordninger kan tegnes litt enklere enn generelle relasjoner:



Vi kan droppe å tegne løkker, og vi trenger heller ikke tegne $x \longrightarrow z$ hvis vi har tegnet $x \to y$ og $y \to z$.

Eksempel: $\leq$ på $\mathbb{N}$ kan tegnes

$\subseteq$ på $P(\{0,1,2\})$ kan tegnes



Merk: tegner "oppover". Da blir pilene overflødig. Kalles Hassediagram.

Merk: $\{1\} \nsubseteq \{2\}$ og $\{2\} \nsubseteq \{1\}$ ikke alt kan <u>sammenlignes</u>.

Ekvivalensrelasjoner

Delvise ordninger ~ "mindre enn eller lik"

Ekvivalensrelasjoner ~ "lik"

<u>Def</u> En refleksiv, symmetrisk og transitiv relasjon kalles en <u>ekvivalensrelasjon</u>

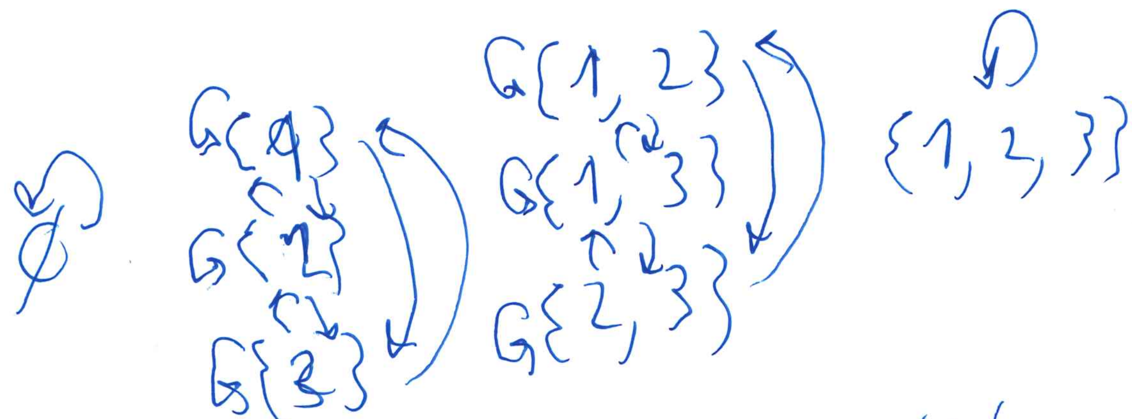
<u>Eksempel</u> La $A = P(\{1,2,3\})$

$$R_1 = \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in A \times A \mid |x| = |y|\}$$

er to ekvivalensrelasjoner.

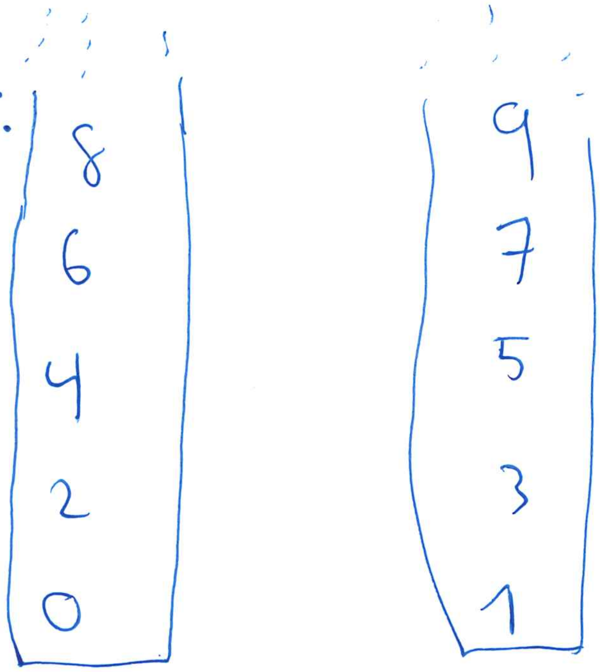
R_2:



To mengder er relatert hvis ~~like~~ de har like mange elementer.

La $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+y \text{ partall}\}$

R_3:

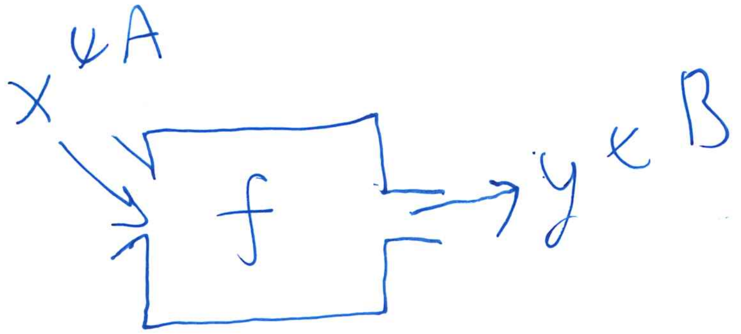


Alle partall er relatert med hverandre, og alle oddetall er relatert med hverandre,

R_3 er en ekvivalensrelasjon,

Funksjoner

Idé: Vi har to mengder A og B, en funksjon fra A til B er en abstrakt "maskin" som tar inn elementer fra A og gir ut noe i B:

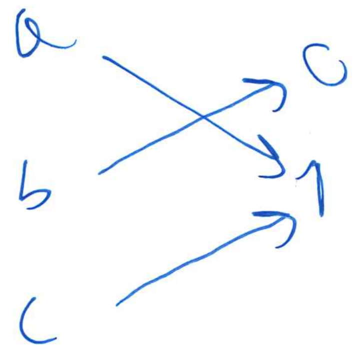


Må gi samme output hver gang den blir gitt samme input.

Funksjoner kan defineres som spesielle relasjoner:

La $A = \{a, b, c\}$ og $B = \{0, 1\}$

f:



og vi kan skrive

$f(a) = 1$

$f(b) = 0$

$f(c) = 1$. istedet for

$(a, 1) \in f$

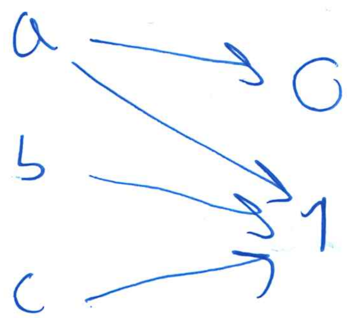
$(b, 0) \in f$

$(c, 1) \in f$

~~Def En f a~~

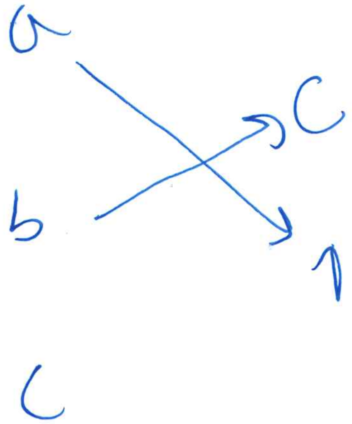
Def En funksjon f fra A til B, er en relasjon fra A til B slik at alle $x \in A$ er relatert til nøyaktig ett element i B.

Eks:



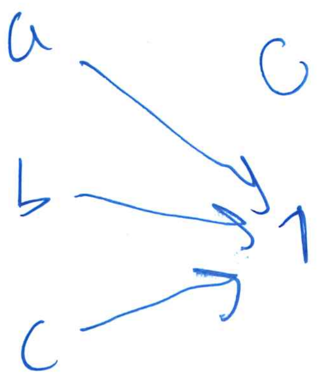
IKKE funksjon

(a er relatert til 2 elementer)



IKKE funksjon

(c er relatert til 0 elementer)



OK

Vi har sett funksjoner før:

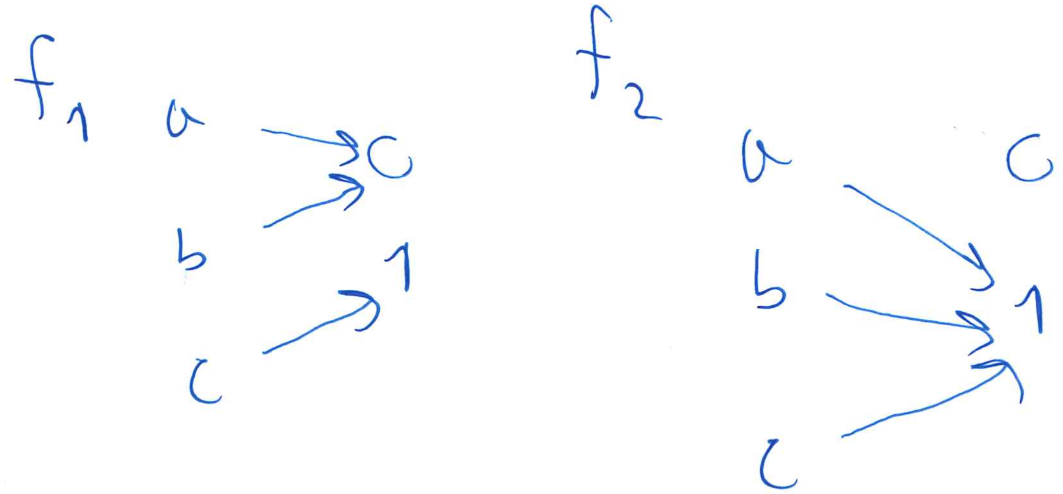
$f(x) = x + 2$ som funksjon fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$: $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x+2\}$

$(1,3) \in f \sim f(1) = 3$

<u>Def</u> En funksjon f fra A til B er <u>surjektiv</u> om den "treffer" alt i B, altså om det for enhver $y \in B$ finnes en $x \in A$ slik at $f(x) = y$.

<u>Def</u> En funksjon f fra A til B er <u>injektiv</u> om elementene i B aldri treffes av to ulike elementer i A:
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Eks La $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$



f_1 er surjektiv, ikke injektiv.

f_2 er verken eller.

La $A = \mathbb{R}$ og $B = \mathbb{R}$

$f(x) = x + 2$ er injektiv og surjektiv.

La $A = \mathbb{Z}$ og $B = \mathbb{Z}$

$f(x) = 2 \cdot x$ er injektiv, ikke surjektiv.

Def En funksjon som er injektiv og surjektiv kalles bijektiv.

Bijektive funksjoner mellom to mengder er bare mulig om mengdene er like store:

$$
\begin{aligned}
1 &\longrightarrow a \\
2 &\longrightarrow b \\
3 &\longrightarrow c
\end{aligned}
$$

Def Vi sier at to mengder A og B har lik **kardinalitet** hvis det eksisterer en bijektiv funksjon $f: A \to B$. Skriver $|A| = |B|$

Eksempel $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$

Lø $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{hvis } x \leq 0 \\ 2x-1 & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$

$$
\begin{array}{ccc}
\vdots & & \\
-3 & \longrightarrow & 6 \\
-2 & \longrightarrow & 4 \\
-1 & \longrightarrow & 2 \\
0 & \longrightarrow & 0 \\
1 & \longrightarrow & 1 \\
2 & \longrightarrow & 3 \\
3 & \longrightarrow & 5 \\
4 & \longrightarrow & 7 \\
\vdots & &
\end{array}
$$

<u>Def</u> En mengde A er tellbar hvis det finnes en injektiv funksjon $A \to \mathbb{N}$

Eksempelet over viser at $\mathbb{Z}$ er ~~N~~ tellbar.