Kombinatorikk

Kombinatorikk handler grunleggende sett om telling.

Vi begynner med et eksempel. La $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 299\}$. Hvor mange tall i A kan deles, uten rest, på 2 eller 3?

Vi undersøker først hvor mange tall som kan deles på 2: Annenhvert tall er partall. Vi begynner på et partall (0) og slutter på et oddetall (299). Vi har 300 tall totalt, 150 partall.

Hvert tredje tall kan deles på 3. Vi har her 300 tall og 100 som kan deles på 3: $\{0 \cdot 3, 1 \cdot 3, 2 \cdot 3, \ldots, 99 \cdot 3\}$.

Det er fristende å da si at vi har $150 + 100 = 250$ tall som kan deles på 2 eller 3. Dette blir feil!

problemet her er nemlig at vi teller med en del tall to ganger: 6 kan deles på 2 og 3, og telles derfor en gang ekstra.

Antallet tall i A som kan deles på 2 eller 3 blir altså antall tall som kan deles på 2, pluss antall tall som kan deles på 3, minus tallene som kan deles på 2 ~~og~~ og 3.

Tall som kan deles på 2 ~~og~~ og 3 er de som kan deles på 6, og vi har $300/6 = 50$ av dem i A.

Svaret på spørsmålet vårt blir derfor

$$150 + 100 - 50 = 200$$

Vi måtte unngå <u>dobbeltelling</u> for å få riktig svar. Ofte i kombinatorikk er det lett å telle ting for mange ganger.

Trikset over har et eget navn, nemlig inklusjon-eksklusjonsprinsippet:

Gitt to endelige mengder X og Y sier dette prinsippet at

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

I vårt tilfelle kan vi ~~la X være~~

la $X = \{a \in A \mid a \text{ kan deles på } 2\}$

og $Y = \{a \in A \mid a \text{ kan deles på } 3\}$

Da gir inklusjon-eksklusjonsprinsippet oss svaret $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y| =$

$$150 + 100 - 50 = 200$$

som i sted.

Merk at $|X \cup Y| \leq |X| + |Y|$

Når har vi likhet? Altså når er
$|X \cup Y| = |X| + |Y|$?

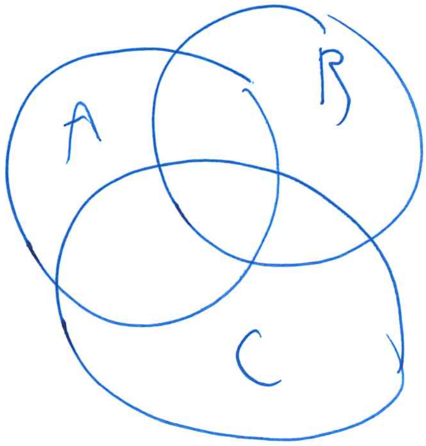
Jo, når $|X \cap Y| = 0$, altså $X \cap Y = \emptyset$.

Dette gir mening, for da er det
ingen elementer som er i fare for å
~~å~~ ~~å~~ bli talt dobbelt.

Def La A, B være mengder. A og B sies
~~å være disjunkte~~
å være disjunkte mengder hvis $A \cap B = \emptyset$.

Inklusjon-eksklusjons Prinsippet kan utvides til flere mengder:

La A, B, C være endelige mengder.



$$|A \cup B \cup C| = \left(|A| + |B| + |C|\right) - \left(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\right)$$
$$+ |A \cap B \cap C|$$

Multiplikasjonsprinsippet

Vi har sett at det er 2^n bitstrenger av lengde n, fordi en bitstreng av lengde n bestemmes ~~alltid~~ unikt av n binære valg.

Generelt, har vi n valg med $a_1, a_2, \ldots, a_n$ muligheter i hvert valg, er det totalt

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

muligheter.

Dette kalles multiplikasjonsprinsippet.

<u>Eks</u> La $A=\{1,2,3\}$ og $B=\{1,2,3,4,5\}$

$$|A\times A\times A\times B\times B| = 3^3\cdot 5^2$$

fordi et element i mengden $A\times A\times A\times B\times B$ bestemmes av 5 valg, de første 3 valgene har 3 muligheter, og de siste 2 har 5 muligheter.

<u>Eks</u> La $A=\{1,2,3,4,5\}$ La

$$B=\{(x,y,z)\in A^3 \mid x+y \text{ oddetall, og } y+z \text{ oddetall}\}$$

Hva er $|B|$?

Vi har to mulige konfigurasjoner av partall/oddetall:

(1) par odd par

(2) odd par odd

I situasjon 1 har vi

~~2 · 2~~

$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ muligheter.

I andre situasjon har vi

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ muligheter

Til sammen $12 + 18 = 30$ muligheter.

Dette viser hvordan multiplikasjons-prinsippet kan anvendes selv når vi ikke med en gang kan "se" hvor mange valg vi har i vårt steg.

Telling av permutasjoner

Def La A være en endelig mengde. En måte å skrive elementene i A på, i rekkefølge, kalles en permutasjon av A.

Eks La $A = \{a, b, c\}$

acb

cab

cba

Er da 3 ulike permutasjoner av A. Hvor mange finnes det?

Den første bokstaven vi skriver må være a, b eller c. Vi har 3 valg. Når vi har skrevet denne har vi 2 valg for neste. Til slutt, når vi har skrevet 2 bokstaver, er det bare en igjen, så den siste bokstaven bestemmes av de to første.

Vi har derfor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

permutasjoner ~~av~~ av A.

Teorem La X være en endelig mengde med n elementer. Det finnes da

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

permutasjoner av X.

Bevis: En permutasjon av X bestemmes av n valg, hvor vi i valg nummer i har n-i muligheter, der vi lar i=0 representere det første valget. Multiplikasjons-prinsippet gir oss

$$(n-0) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(n-1)) = n!$$

valg.

Regelen er altså kort fortalt at n ting kan permuteres på $n!$ måter.

Eks La $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Hvor mange permutasjoner av A finnes, hvor $\{5, 6, 7\}$ kommer til sist?

Altså

$$3\ 2\ 1\ 4\ 6\ 5\ 7 \quad \checkmark$$

$$5\ 1\ 2\ 3\ \underbrace{4\ 6\ 7} \quad \times$$

$$\{4, 6, 7\} \neq \{5, 6, 7\}$$

En slik permutasjon tilsvarer først et valg av en permutasjon av $\{1, 2, 3, 4\}$ og så et valg av en permutasjon av $\{5, 6, 7\}$.

Altså får vi $4! \cdot 3!$ muligheter.

Eks La A være som over.

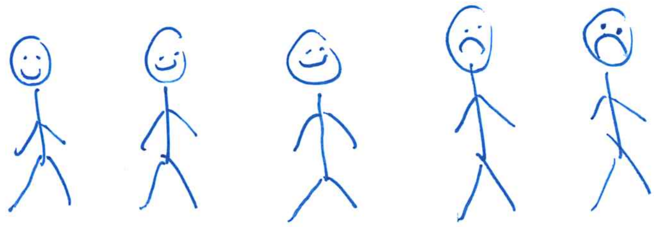
Hvor mange permutasjoner av A finnes hvor 5 kommer etter 4?

Merk: Like mange permutasjoner hvor 4 kommer før 5 som omvendt.

Enhver permutasjon faller i en av de to like store gruppene. Så ~~8~~ svaret blir $7!/2$

Utvalg

Si at du skal velge et lag på 3 spillere fra en klasse på 5 elever.



En mulighet å gjøre det på er å stille de fem elevene på rekke, og så velge de tre første fra venstre til laget ditt.

Det er 5! måter å stille opp elevene på, men ikke 5! forskjellige utvalg å gjøre. Hvorfor? Jo, vi teller mange utvalg flere ganger:

Hvor mange ganger teller vi et mulig utvalg på?

$$\underbrace{A \quad B \quad C}_{3!} \quad \underbrace{D \quad E}_{2!}$$

Utvalget $\{A, B, C\}$ kan vi få på $3! \cdot 2!$ muligheter. Hvert utvalg blir derfor talt $3! \cdot 2!$ ganger. Vi har derfor ikke $5!$ utvalg, men

$$\frac{5!}{2!\,3!} = \binom{5}{3}$$

Generelt, skal du velge k ting blant totalt n, har du "k velg n" $= \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

muligheter.