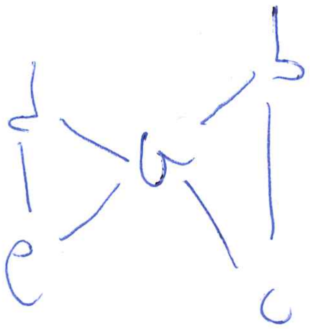
Eulerkretser

Def En eulerkrets i en graf er en krets som besøker alle kantene i grafen nøyaktig en gang.

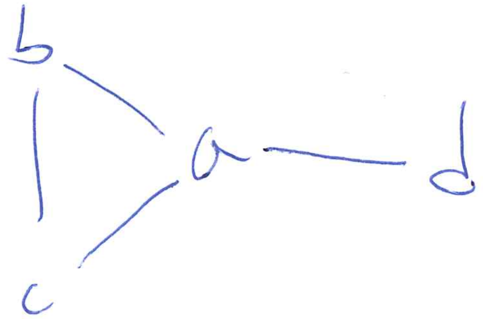
Eks

G:



abcadea er da en ~~Eul~~ eulerkrets.

G':



Har G' en eulerkrets? Vi må besøke/innom kanten ad, men bare én gang. ~~Enten vi~~

1. Begynner kretsen i d må den slutte med ad og begynne da. Da blir {a, d} besøkt (minst) to ganger.

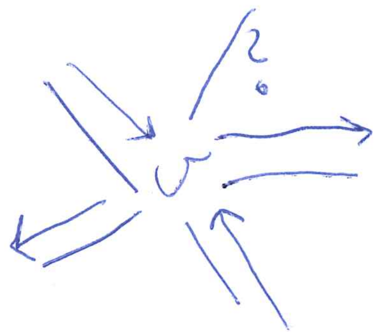
2. Begynner kretsen et annet sted vil den inneholde "ada", som ikke er ok,

fordi da også vil $\{d,a\}$ besøkes (minst) 2
2 ganger.

Faktisk kan vi ikke ha eulerkretser om det finnes noder med oddetalls grad: vi må "ut" av en node like mange ganger som "inn".

__Teorem__ La G være en sammenhengende 3 (endelig) graf. Da har G en eulerkrets hvis og bare hvis alle nodene i G har partallsgrad.

__Bevis:__ Vi viser "$\Longrightarrow$" kontrapositivt.
La G være en graf med en node v med oddetallsgrad. La nå $k = w_1 \ldots w_n w_1$ være en vilkårlig ~~vandring~~ krets.



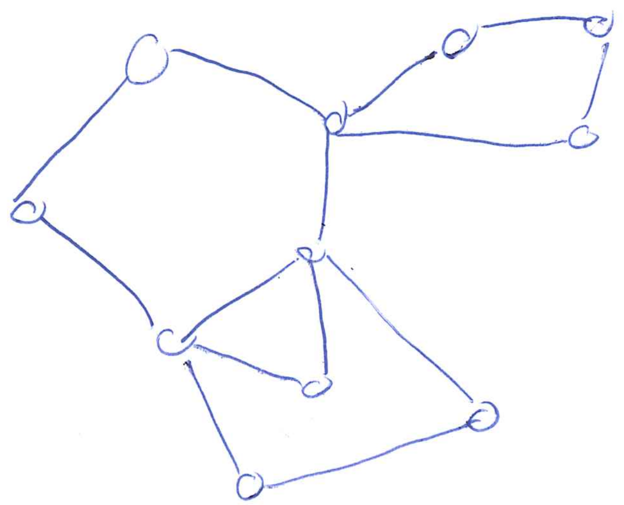
Hvis en kant $e = \{v, w\}$ besøkes i k, sier ~~vi at den går inn til v om "wv"~~ vi at den går inn til v om "wv" står i k, og ut av v om "vw" står i k.

Merk: Det må være like mange kanter som går inn til v som ut av v. Da v har oddetallsgrad kan derfor ikke ~~alle opptre~~ alle kantene som ligger inntil v besøkes. Ok.

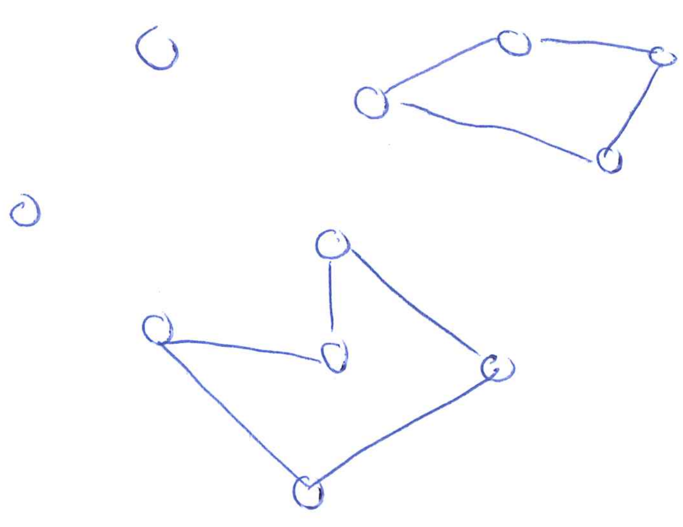
Vi må nå bevise at grafer som er sammenhengende og har kun partallsgrader har en euler~~sykel~~ krets.

Idé: Hvis vi har en graf med bare partallsgradnoder, så kan vi finne en sykel i grafen (med mindre den er tom eller har 1 node)

G:

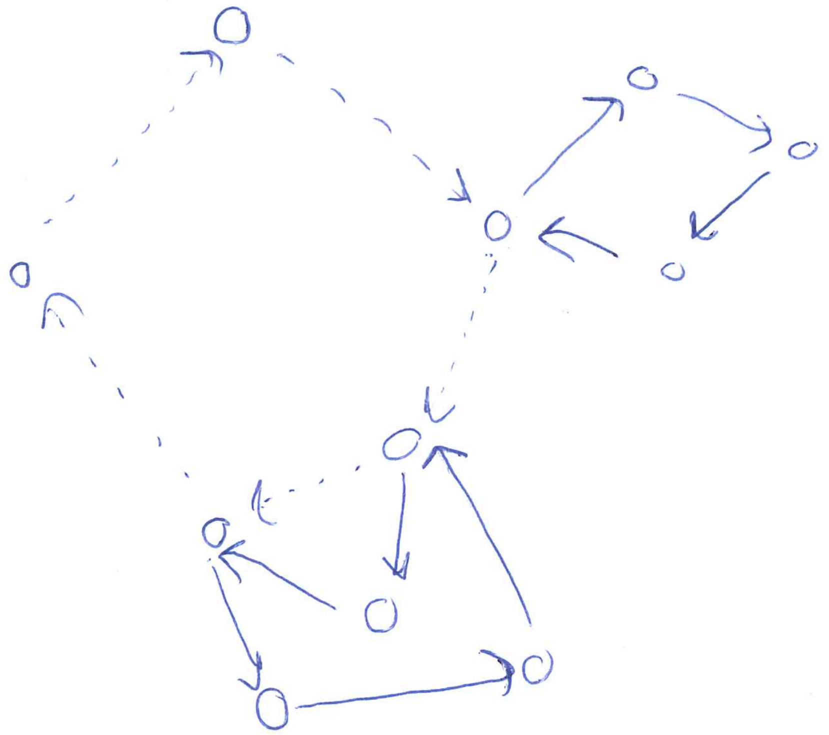


G − C:



La C være en slik sykel.
Fjerner vi nå fra G alle kantene som opptrer i C, får vi en "mindre" graf.
Merk at kretser i G−C kan pusles sammen til kretser i G:

G:



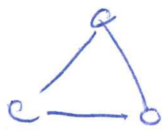
Basis: Hvis G har 0 kanter

~~A~~ er det å stå i ro en eulerkrets.

Hvis G har 1 kant så har de to nodene ~~og~~ oddetalls grad.

Hvis G har 2 kanter har (minst) 1 node oddetalls grad.

Om G har 3 kanter og partallsgrader, er G en sykel:



Anta nå at påstanden gjelder for alle grafer med $\leq n$ kanter. Vi kan anta $n \geq 3$.

La da G være en graf med $n+1$ kanter, der alle noder har ~~oddetalls grad~~ ~~og G er~~ ~~sammenh~~ partalls grad og G sammenhengende

Merk at det må finnes en sykel i G.

(Med andre ord, hvorfor er G ikke et tre?)

Velg en slik syke̲l C.

La $H = G - C$, hvor vi fjerner kantene i C.

Da har hver sammenhengende komponent i H en eulerkrets.

Vi kan sette sammen alle disse til en Eulerkrets i G ved hjelp av C.