Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0301 våren 2023

Relasjoner

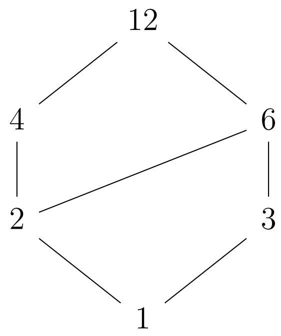
Oppgave 1 (7 poeng)

Tegn hassediagrammet til den partielle ordningen R på mengden D_{12} hvor

$$D_{12} := \{n \in \mathbb{N} \mid n \,\text{deler}\, 12 \,\text{uten rest}\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

og hvor $(x, y) \in R$ hvis og bare hvis x deler y uten rest for $x, y \in D_{12}$.

Løsning.



□

Oppgave 2 (7 poeng)

La

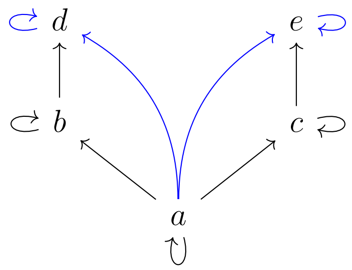
$$A := \{a, b, c, d, e\}$$

og

$$R := \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (b, d), (c, e)\}.$$

Sjekk om R er en partiell ordning på A. Hva må eventuelt legges til for å få en partiell ordning?
Hint: Tegn den rettede grafen som svarer til relasjonen R.

Løsning. Pilene i svart er de som opprinnelig var i R. Pilene i blå er de som må legges til for at vi skal få en partiell ordning.



For at R skal være en partiell ordning på A må R være refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv.

For at R skal være refleksiv må $(x, x) \in R$ for alle $x \in A$. Vi ser at $(d, d), (e, e)$ ikke er i R og må altså legges til. Med andre ord er R altså ikke en partiell ordning på A.

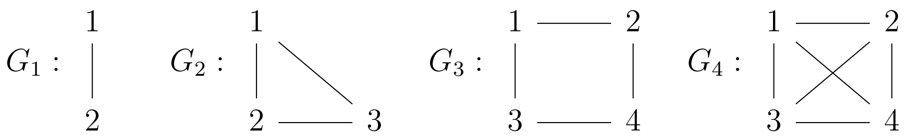
Det kan være nyttig å bruke kontrapositiv av definisjonen av anti-symmetrisk for å undersøke hvorvidt R har denne egenskapen. I så fall må vi sjekke at for alle $x, y \in A$ med $x \neq y$ så har vi at kun en av (x, y) og (y, x) er i R. Dette holder for R, noe en ser ved å inspisere de siste fire elementene i R.

For at R skal være transitiv må vi ha for alle $x, y, z \in A$ at hvis $(x, y) \in R$ og $(y, z) \in R$ så er også $(x, z) \in R$. Dette holder ikke, og vi ser at vi må legge til (a, d) og (a, e). $\square$

Grafer

Oppgave 3 (5 poeng)

Hvilke av de følgende fire grafene har en eulerkrets?



Løsning. Vi vet fra teorien at en graf må være sammenhengende for å ha en eulerkrets. Samtlige av grafene er sammenhengende.

Vi vet også at en sammenhengende graf har en eulerkrets hvis og bare hvis alle dens hjørner har partallsgrad.

Det er kun G_2 og G_3 som kun har hjørner med partalls grad, så det er kun de som har eulerkretser. □

Oppgave 4 (6 poeng)

Den komplette grafen på n hjørner kan defineres som $K_n := (V, E)$ med

$$V := \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

og E bestående av alle undermengder av V som har kardinalitet 2.

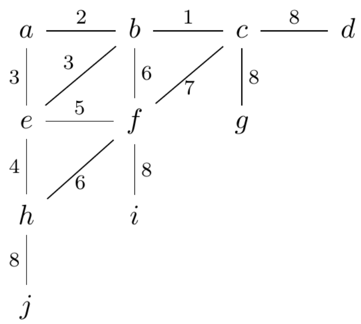
For hvilke n har K_n en eulerkrets?

Løsning. Et vilkårlig hjørne v i K_n har grad $n - 1$ siden det går en kant fra v til alle de andre hjørnene i K_n. Hvis n er odde er $n - 1$ jevn og motsatt. Som følge har K_n en eulerkrets hvis og bare hvis n er odde. □

Oppgave 5

a) (6 poeng)

Bruk Kruskals algoritme til å finne et minimalt utspennende tre for følgende vektede graf. Ta med alle vesentlige steg.



Løsning. Vi ordner kantene i rekkefølge fra minst til størst vekt:

$$bc, ab, ae, be, eh, ef, bf, fh, cf, cd, cg, fi, hj$$

Både bc og ab må være med. Vi kan så velge mellom ae og be, men kan ikke ha med begge siden det fører til en sykel. Så må eh og ef med. Ingen av bf, fh, cf kan med siden det ville introdusert sykler. Og så må alle av cd, cg, fi, hj med siden de har alle et endepunkt av grad 1.

Et konkret eksempel på et minimalt utspennende tre som algoritmen kan produsere kan da være $bc, ab, ae, eh, ef, cd, cg, fi, hj$. Her nevnes kantene i den rekkefølgen de har blitt lagt til i. □

b) (4 poeng)

Har denne vektede grafen et unikt minimalt utspennende tre?

Løsning. Nei. Vi kan velge mellom å ha med ae og be siden de begge har vekt 3 og ikke lager sykler når de først kan legges til. □

Logikk

Oppgave 6

a) (7 poeng)

Gi sannhetstabellen til

$$(p \land q) \to r.$$

Løsning.

p	q	r	$p \land q$	$(p \land q) \to r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

□

b) (4 poeng)

Se også på

$$r \to (\neg p \lor \neg q).$$

Kan du få to logiskt ekvivalente proposisjoner ved å sette inn en negasjon i et av uttrykkene i **a)** og **b)**?

Løsning. Vi kan merke oss at

$$\begin{aligned} r \to (\neg p \lor \neg q) &\equiv \neg(\neg p \lor \neg q) \to \neg r \\ &\equiv \neg\neg(p \land q) \to \neg r \\ &\equiv (p \land q) \to \neg r. \end{aligned}$$

Den siste linjen her blir ekvivalent med proposisjonen i **a)** hvis en setter inn en negasjon foran $\neg r$. Altså blir de originale uttrykkene ekvivalente hvis en setter inn en negasjon foran r i et av dem. □

Oppgave 7 Anta at p, q og r er proposisjonsvariabler. Bruk logiske ekvivalenser til å avgjøre for hver av de følgende proposisjonene om de er tautologier, tilfredsstillbare eller utilfredsstillbare.

Hint: $p \vee \neg p \equiv T$.

a) (5 poeng)

$q \vee (p \to q) \vee \neg q$

Løsning. Her kan vi se at

$$\begin{aligned} q \vee (p \to q) \vee \neg q &\equiv q \vee \neg q \vee (p \to q) \\ &\equiv T \vee (p \to q) \\ &\equiv T. \end{aligned}$$

Den første ekvivalensen følger av at $\vee$ er kommutativ, den andre fra hintet og den tredje fra at $T \vee p \equiv T$ for alle proposisjoner p. Med andre ord er proposisjonen i **a)** en tautologi. Den er derfor også tilfredsstillbar. □

b) (5 poeng)

$(p \vee \neg p) \leftrightarrow ((q \to r) \wedge (q \wedge \neg r))$

Løsning. Hvis vi bruker hintet ser vi at proposisjonen i **b)** er en tautologi hvis og bare hvis $(q \to r) \wedge (q \wedge \neg r)$ er en tautologi. Men vi kan se at $q \to r \equiv \neg q \vee r \equiv \neg(q \wedge \neg r)$, og vi vet at $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon for alle proposisjoner p. Som følge er proposisjonen i **b)** en kontradiksjon, altså aldri sann og er derfor ikke en tautologi. Den er derfor også utilfredsstillbar. □

Funksjoner

Oppgave 8 (6 poeng)

Er $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gitt ved $f(n) := n + 2$ surjektiv? Injektiv?

Løsning. Siden $\mathbb{N}$ ikke inneholder negative tall, er ikke 0 og 1 i bildet til f. Som følge er ikke f surjektiv.

For å se at f er injektiv er det nok å merke seg at hvis $f(m) = f(n)$ så er $m + 2 = n + 2$ slik at også $m = n$. $\square$

Oppgave 9 (7 poeng)

La $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ være funksjoner.

Vis at hvis $g \circ f$ er surjektiv så er g også surjektiv.

Løsning. Vi skal vise at for $z \in Z$ finnes det $y \in Y$ slik at $g(y) = z$.

Siden $g \circ f$ er surjektiv vet vi at det finnes $x \in X$ slik at $g(f(x)) = z$, og vi kan da velge $y = f(x)$.

Vi kunne også løst dette ved å bruke at en funksjon er surjektiv hvis og bare hvis den har en høyreinvers. Siden $g \circ f$ er surjektiv har den en høyreinvers h. Så $(g \circ f) \circ h = 1_Z$. Men da får vi at $f \circ h$ er en høyreinvers for g siden $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$. $\square$

Endelige tilstandsautomater og språk

I denne delen antar vi at alle språk, automater og uttrykk har alfabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Oppgave 10

a) (7 poeng)

Beskriv med ord det språket som svarer til følgende regulære uttrykk:

$$(a \cup b)^* bb$$

Løsning. Siden $\mathcal{L}((a \cup b)^*) = \Sigma^*$ får vi at $\mathcal{L}((a \cup b)^* bb) = \Sigma^* bb$ som altså består av alle strenger over $\Sigma = \{a, b\}$ som ender med bb. $\square$

b) (7 poeng)

Gi en deterministisk endelig tilstandsautomat med nøyaktig tre tilstander som aksepterer språket fra forrige oppgave, altså $\mathcal{L}((a \cup b)^* bb)$.

Løsning. Vi kan få til dette ved å konstruere en automat med tilstander som svarer til en "buffer" som holder styr over opptil de siste to symbolene vi har lest av i input. Hvis vi leser av en a fra input skal vi sendes tilbake til starttilstanden.

Vi har tilstander $K = \{t_\lambda, t_b, t_{bb}\}$, starttilstand $s = t_\lambda$ og sluttilstand t_{bb}.

Overgangene er gitt ved følgende tabell:

t_λ	t_λ	a
t_λ	t_b	b
t_b	t_λ	a
t_b	t_{bb}	b
t_{bb}	t_λ	a
t_{bb}	t_{bb}	b

Denne automaten er deterministisk siden det for hver tilstand finnes nøyaktig én overgang med merkelapp σ for hver σ i alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$.

Som følge er det nok å sjekke at vi ender opp i sluttilstanden t_{bb} kun hvis de siste to symbolene i strengen er bb, men det holder ved måten vi har konstuert automaten. $\square$

Oppgave 11 (8 poeng)

Forklar hvorfor det ikke kan finnes en endelig tilstandsautomat M med fire tilstander og $\mathcal{L}(M) = \{a^4\}$.

Løsning. Anta at det finnes en slik automat M. Siden a^4 aksepteres av M må det finnes en vandring i M av lengde 4 med kun overganger med merkelapp a. En slik vandring må svare til en liste av fem tilstander. Ved hanske-skuffe-prinsippet må det være en gjentagelse i denne listen av tilstander siden automaten kun har fire tilstander. Som konsekvens må det være en krets i automaten bestående av overganger med merkelapp a og som følge aksepteres ikke bare a^4, men a^k for en $k > 4$. Dette er en kontradiksjon, og som følge kan det ikke finnes en slik automat M. $\square$

Induksjon

Oppgave 12 (9 poeng)

Bruk induksjon til å vise at

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

holder for alle heltall $n \geq 1$.

Hint: Merk at

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)).$$

Løsning. Grunnsteget er OK siden $1^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3$.

For induksjonsteget legger vi til $(n+1)^2$ på begge sider og forsøker å anvende hintet.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1)) \end{aligned}$$

Vi ser at vi er i mål hvis vi har at $n(2n+1)+6(n+1) = (n+2)(2(n+1)+1)$. Men det holder siden $n(2n+1)+6(n+1) = 2n^2+(6+1)n+6$ og $(n+2)(2(n+1)+1) = 2n^2+(3+4)n+6$. $\square$