Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0301 sommer 2023

Alle svar må begrunnes.

Relasjoner

Oppgave 1 (9 poeng)

La

$$A := \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

og la R være slik at $(x, y) \in R$ hvis og bare hvis $x < y$.

Vis at R har to av de tre egenskapene en relasjon må ha for å være en partiell ordning. Hva må legges til for å få en partiell ordning?

Løsning. Litt upresist følger dette av at relasjonen $<$ er "mindre enn" mens relasjonen $\leq$ er "mindre enn eller lik", og sistnevnte er en partiell ordning. For $\leq$ svarer refleksiviteten til "eller lik", så $<$ er derfor kun transitiv og anti-symmetrisk.

Mer presist kan vi se at $<$ ikke er refleksiv siden $(x, x) \in R$ holder hvis og bare hvis $x < x$, men det finnes ingen tall dette holder for. Følgelig holder det i hvert fall ikke for noen $x \in A$.

Vi kan se at R er transitiv siden vi vet for alle tall x, y, z at hvis $x < y$ og $y < z$ så må $x < z$, også. Dette holder derfor også hvis vi begrenser til å se på $x, y, z \in A$.

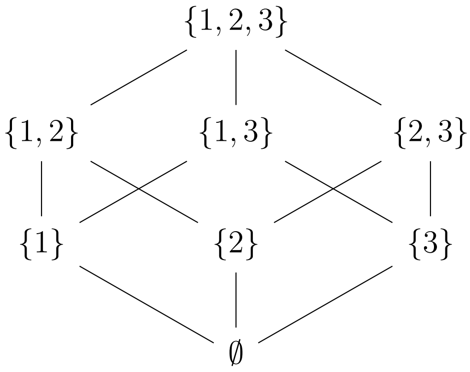
Det gjenstår å sjekke at R er anti-symmetrisk. Dette er ekvivalent med å sjekke for $x, y \in A$ slik at $x \neq y$ så har vi at ikke begge av (x, y) og (y, x) er i R. Men dette følger av at for alle tall x, y så er nøyaktig en av $x < y$, $y < x$ eller $x = z$ sanne. $\square$

Oppgave 2 (9 poeng)

Husk at for en mengde A er $\mathcal{P}(A)$ potensmengden til A.

Tegn hassediagrammet til den partielle ordningen R på mengden $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ hvor $(X, Y) \in R$ hvis og bare hvis $X \subseteq Y$.

Løsning.



$\square$

Grafer

Oppgave 3 (6 poeng)

Hvilke av de følgende fire grafene har en eulervei som ikke er en krets?

$$G_1 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, dash] \\ 2 \end{tikzcd} \qquad G_2 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2 \arrow[d, dash] \\ 3 \arrow[r, dash] & 4 \end{tikzcd} \qquad G_3 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & 2 \arrow[d, dash] \\ 3 \arrow[r, dash] & 4 \end{tikzcd} \qquad G_4 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & 2 \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\ 3 \arrow[r, dash] & 4 \end{tikzcd}$$

Løsning. Fra teorien vet vi at en graf har en eulervei som ikke er en krets hvis og bare hvis grafen har nøyaktig to hjørner som har oddetallsgrad. Følgelig er det kun G_1 og G_3 som har eulerveier som ikke er kretser. □

Oppgave 4

Veigrafen på n hjørner kan defineres som $P_n := (V, E)$ med

$$V := \{1, 2, 3, \ldots, n\},$$

og E bestående av alle undermengder av V på formen $\{i, i+1\}$ for $1 \leq i \leq n-1$.

a) (5 poeng) Tegn de første tre veigrafene. Altså, tegn P_n for $n = 1, 2, 3$.

Løsning. $P_1 : \ 1$ $\qquad P_2 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \end{tikzcd}$ $\qquad P_3 : \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \end{tikzcd}$

□

b) (9 poeng) Vis at P_n har en eulervei for alle heltall $n \geq 1$.

Løsning. Her må vi håndtere tilfellene $n = 1$ og $n \neq 1$ forskjellig. For $n = 1$ er det klart at den har en eulerkrets, nemlig den trivielle kretsen bestående av ingen kanter. Dette er også konsistent med teorien siden P_1 er sammenhengende og har alle hjørner av partallsgrad.

Vi husker så fra teorien at en sammenhengende graf G har en eulervei som ikke er en eulerkrets hvis og bare hvis G har nøyaktig to hjørner av oddetallsgrad. For $n > 1$ har hjørnene 1 og n i P_n oddetallsgrad siden de kun er med i kantene $\{1, 2\}$ og $\{n - 1, n\}$. For alle andre $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ så har vi at i er i nøyaktig to kanter, altså $\{i - 1, i\}$ og $\{i, i + 1\}$. Det følger altså at P_n har en eulervei som ikke er krets for $n > 1$. $\square$

Logikk

Oppgave 5

a) (9 poeng) Gi en felles sannhetstabell for proposisjonene

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

og

$$p \wedge (q \vee r).$$

Løsning.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$\square$

b) (4 poeng) Forklar hvorfor proposisjonene i **a)** er logiskt ekvivalente.

Løsning. Dette følger av at de har like kolonner i sannhetstabellen. Med andre ord er $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ en tautologi og $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ må derfor holde. $\square$

Oppgave 6 (7 poeng)

Anta at p, q og r er proposisjonsvariabler. Bruk logiske ekvivalenser til å avgjøre om

$$((q \vee \neg q) \to p) \wedge (r \to p)$$

er en tautologi, tilfredsstillbar eller utilfredsstillbar.

Løsning. Hvis vi bruker at $(p \vee \neg p) \equiv T$ ser vi at $(q \vee \neg q) \to p$ er sann hvis og bare hvis p er sann. Med andre ord er ikke proposisjonen en tautologi. Det gjenstår å sjekke hvorvidt den er tilfredsstillbar, men det er den siden den blir sann hvis vi velger både p og r til å være sanne. $\square$

Funksjoner

Oppgave 7 (9 poeng)

Er funksjonen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gitt ved $f(n) := 2n + 4$ surjektiv? Injektiv?

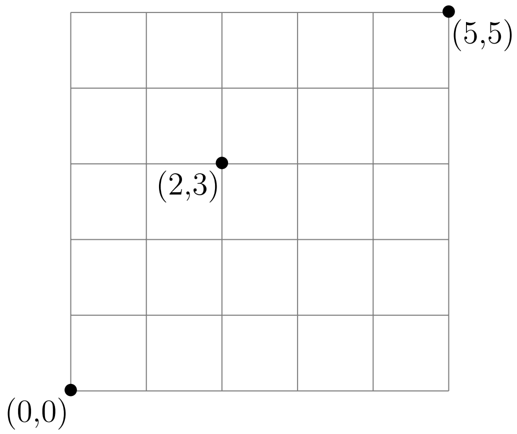
Løsning. Siden $f(n)$ er et partall for alle heltall $n \in \mathbb{Z}$, er det ingen oddetall i bildet til f og f er følgelig ikke surjektiv.

For å se at f er injektiv er det nok å merke seg at hvis $f(m) = f(n)$ så er $2m+4 = 2n+4$ slik at også $2m = 2n$, eller $m = n$. Med andre ord gir $f(m) = f(n)$ at også $m = n$ og f er altså injektiv. $\square$

Kombinatorikk

Oppgave 8 (10 poeng)

Betrakt følgende 5×5-rutenett. I denne oppgavene skal en telle antall veier mellom $(0,0)$ og $(5,5)$ som kun går vertikalt oppover eller horisontalt til høyre, og det er kun ved heltalls koordinater at de kan skifte retning fra horisontalt til vertikalt og omvendt.



Hvor mange slike veier finnes det?

Løsning. Merk at vi kan tolke en slik vei som en streng av lengde 10 bestående av H'er og V'er. F.eks. vil veien som først går horisontalt fra $(0,0)$ til $(5,0)$ og så til $(5,5)$ svare til strengen $HHHHHVVVVV$. I tillegg kan vi merke oss at hvis vi velger posisjonene til H'ene i en slik streng så er posisjonene til V'ene bestemt og omvendt. Det blir derfor totalt $\binom{10}{5}$ slike veier. □

Endelige tilstandsautomater og språk

I denne delen antar vi at alle språk, tilstandsautomater og uttrykk har alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$.

Oppgave 9

a) **(5 poeng)** Gi et regulært uttrykk som svarer til språket bestående av alle strenger som inneholder strengen ab.

Løsning. En mulighet er $(a \cup b)^* ab(a \cup b)^*$. □

b) **(8 poeng)** Gi en deterministisk endelig tilstandsautomat med nøyaktig fire tilstander som aksepterer språket bestående av alle strenger som begynner med en a og inneholder et oddetall antall a'er.

Løsning. Vi kan få til dette ved å konstruere en automat med tilstander som svarer til en "buffer" som holder styr på første symbol i strengen, og hvis første symbol er a, så holdes det styr på hvorvidt antall a'er odde eller jevnt.

Vi har tilstander $K = \{t_\lambda, t_{(a,2n+1)}, t_b, t_{(a,2n)}\}$, starttilstand $s = t_\lambda$ og finaltilstand $t_{(a,2n+1)}$.

Overgangene er gitt ved følgende tabell:

t_λ	$t_{(a,2n+1)}$	a
t_λ	t_b	b
$t_{(a,2n+1)}$	$t_{(a,2n)}$	a
$t_{(a,2n+1)}$	$t_{(a,2n+1)}$	b
t_b	t_b	a
t_b	t_b	b
$t_{(a,2n)}$	$t_{(a,2n+1)}$	a
$t_{(a,2n)}$	$t_{(a,2n)}$	b

Denne automaten er deterministisk siden det ut fra hver tilstand går nøyaktig én overgang med merkelapp σ for hver σ i alfabetet $\Sigma = \{a, b\}$.

Som følge er det nok å sjekke at vi ender opp i finaltilstanden $t_{(a,2n+1)}$ kun hvis input inneholder et oddetall antall a'er og begynner med en a, men det holder ved måten vi har konstuert automaten. □

Induksjon

Oppgave 10 (10 poeng)

Bruk induksjon til å vise at

$$1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + \cdots + n \cdot (n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

holder for alle heltall $n \geq 1$.

Hint: Det kan være nyttig å se etter en mulighet for å faktorisere og å legge merke til at $\frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}(n+3)$.

Løsning. Grunnsteget er OK siden $1 \cdot (1+1) = 2 = 1/3 \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)$.

For induksjonssteget legger vi til $(n+1)((n+1)+1) = (n+1)(n+2)$ på begge sider, ser hva vi får, og forsøker å bruke hintet:

$$\begin{aligned}
1 \cdot (1+1) + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1)((n+1)+1) &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)((n+1)+1) \\
&= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \\
&= (n+1)(n+2)(\frac{1}{3}n + 1) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

Det var dette som skulle vises. Merk at vi brukte første del av hintet i overgangen fra linje to til tre mens andre del av hintet ble brukt i overgangen fra linje tre til fire. □