Lukkede Euler-veier

Teorem

La $G = (V, E)$ *være en urettet graf eller multigraf uten isolerte hjørner. Da er følgende påstander ekvivalente:*

1. G *har en lukket Euler-vei (*Euler circuit*)*
2. *Alle hjørnene i* G *har partallsgrad og* G *er sammenhengende*

Bevisidé: Vis først at (1) impliserer (2), og deretter at (2) impliserer (1).

Bevis

Anta at G har en lukket Euler-vei. Da må vi vise at G er sammenhengende og at alle hjørnene til G har partallsgrad.
Siden det finnes en vei som går gjennom alle hjørner, finnes det en vei som går mellom to vilkårlige hjørner a og b. Altså er G sammenhengende.

Bevis: Partallsgrad

- Anta at veien starter og slutter i s, og la v være et annet hjørne enn s.
- Hver gang veien går innom v, må den gå ut igjen, så den bidrar med 2 til $\deg v$ hver gang.
- Siden v ikke er stoppestedet, har v partallsgrad.
- Veien slutter i s (muligens etter å ha vært innom k ganger) så total grad blir $1 + 2k + 2n + 1$, som er et partall.

Ferdig med første retning!

Bevis, motsatt vei

Anta at alle hjørner har partallsgrad, og at G er sammenhengende.
Må vise at det finnes en Euler-vei.
Teknikk: Induksjon på antall kanter.

Basistilfellet

Basistilfellet er at det er 1 eller 2 kanter, og da er det tre mulige kombinasjoner, og i alle tilfeller har vi Euler-veier.

Induksjonssteget

Anta at det finnes en Euler-vei når grafen har *mindre enn* n kanter. Se så på en sammenhengende graf med n kanter og partallsgrad i hjørnene.

- Velg en startkant s. Siden G er sammenhengende og hvert hjørne har partallsgrad, kan vi lage en lukket vei $\mathcal{C}$ som ikke går innom noen kanter to ganger. Dersom veien går innom alle kantene er vi ferdige.
- Hvis ikke: Fjern alle kanter som er med i veien, og alle hjørner som blir isolert.
- Vi får da en delgraf K, der alle hjørnene har partallsgrad, men K er kanskje ikke sammenhengende.

Induksjonssteget, forts.

K delgraf av G, ikke sammenhengende, men bare partallsgrader.

- Hver komponent av K er sammenhengende.
- Hver komponent har færre enn n kanter.
- Ved induksjonsantagelsen finnes det lukkede Euler-veier på hver komponent.
- Hver komponent inneholder et hjørne fra $\mathcal{C}$.

Slik lager vi en Euler-vei på G

- Start i et hjørne s, og følg $\mathcal{C}$ til du kommer til et hjørne s_1 på den første komponenten $\mathcal{C}_1$ du møter.
- Følger Euler-veien på $\mathcal{C}_1$ til du er ferdig og tilbake i s_1. Fortsett langs $\mathcal{C}$ til du kommer til neste komponent.
- Gjenta helt til du er tilbake i s. Vi har laget en Euler-vei!