Øving 5

4.1: 1a, 2b, 14, 7, 23a, 24 (obs: b) $a_n \le (\frac{7}{4})$)
4.2: 12, 13

4.1, 1a Visa $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

__Basfall:__ $n=1$ $\sum_{i=1}^{1}(2i-1)^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(2-1)(2+1)}{3}$

__Induksjonssteg:__ Antag sant för något $k \ge 0$. Då

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{k}(2i-1)^2 + [2(k+1)-1]^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k(2k-1)+6k+3)(2k+1)}{3} = \frac{(2k^2+5k+3)(2k+1)}{3} = \frac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}{3}$$

2b Visa $\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i = 2 + (n-1)2^{n+1}$

__Basfall:__ $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} i\cdot 2^i = 1\cdot 2^1 = 2 = 2 + (1-1)2^2$

__Induksjonssteg:__ Antag sant för något $k \ge 0$. Då

$$\sum_{i=1}^{k+1} i\cdot 2^i = \sum_{i=1}^{k} i\cdot 2^i + (k+1)2^{k+1} = 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1)2^{k+1} =$$

$$= 2 + 2k\cdot 2^{k+1} = 2 + ((k+1)-1)2^{k+1+1}$$

14 Visa $2^n < n!$ för $n > 3$

__Basfall:__ $n=4$ $2^4 = 16 < 24 = 4!$

__Induksjonssteg.__ Antag sant för något $k > 3$. Då

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k < 2\cdot k! < (k+1)\,k! = (k+1)!$$

(7)  Antal stockar: $\sum_{i=0}^{n-1}(6+2i)$ n: antal rader

$$\sum_{i=0}^{n-1}(6+2i) = 6n + 2\cdot\frac{(n-1)n}{2} = n^2+5n$$

Ska vara $4n+110$, dvs $n^2+5n = 4n+110$

$$\Leftrightarrow \quad n^2+n-110=0 \quad \Leftrightarrow \quad n = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+440}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{21}{2}$$

$n>0$ ger $n = -\frac{1}{2}+\frac{21}{2} = \underline{10.}$

(23a) Visa för varje $n>0$, $n \neq 1$, $n \neq 3$ att det finns $a, b \in \mathbb{N}$ så att $n = 2a+5b$.

$n=2 \Rightarrow n = 2\cdot 1 + 5\cdot 0$

$n=4 \Rightarrow n = 2\cdot 2 + 5\cdot 0$

$n=5 \Rightarrow n = 2\cdot 0 + 5\cdot 1$

Om $n \geq 6$ så $n-2 \geq 4$ och med induktion kan vi anta att $n-2 = 2a+5b \Rightarrow n = 2(a+1)+5b$.

(24)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	2	3	5	8	13	21

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Visa $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$

<u>Basfall</u> $n=1$ $a_1 = 1 \leq \left(\frac{7}{4}\right)^1$

$n=2$ $a_2 = 2 = \frac{32}{16} \leq \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$

<u>Induktion</u> Antag $a_k \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k$ i st. D.ö.

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \frac{7+4}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{44}{16}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \leq \frac{49}{16}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Alltså $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

4.2 (12) Visa $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Basfall $n=0$ $\sum_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 0 = 1-1 = F_2 - 1$

Induksjonssteg Antag $\sum_{i=0}^{k} F_i = F_{k+2} - 1$ för något $k \geq 0$.
Då $\sum_{i=0}^{k+1} F_i = \sum_{i=0}^{k} F_i + F_{k+1} = F_{k+2} - 1 + F_{k+1} = F_{k+3} - 1$

(13) Visa $\sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{n+2}}{2^n}$

Basfall: $n=1$ $\sum_{i=1}^{1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \frac{F_0}{2^1} = 0 = 1 - \frac{2}{2} = 1 - \frac{F_3}{2^1}$

Induksjonssteg: Antag $\sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i} = 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k}$ för något $k \geq 1$.
Då $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{F_{i-1}}{2^i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{F_{i-1}}{2^i} + \frac{F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{F_{k+2}}{2^k} + \frac{F_k}{2^{k+1}} = 1 - \frac{2F_{k+2} - F_k}{2^{k+1}} =$

$= 1 - \frac{F_{k+2} + (F_{k+2} - F_k)}{2^{k+1}} = 1 - \frac{F_{k+2} + F_{k+1}}{2^{k+1}} = 1 - \frac{F_{k+3}}{2^{k+1}}$.