Øvning 11

11.3: 2, 5, 20, 22, 23

11.4: 10, 14, 18

11.3, 2) $G = (V, E)$: sammanhängande

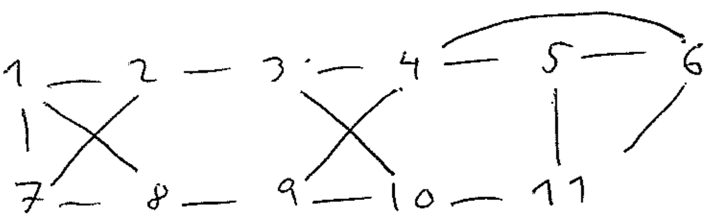
$|E| = 17$, $\forall v \in V \, (\deg(v) \geq 3)$.

$$34 = 2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq |V| \cdot 3$$

$$\Rightarrow |V| \leq \frac{34}{3} = 11 + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |V| \leq 11$$

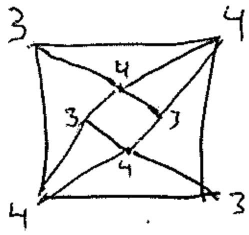
11 är maximum, f. eks finns

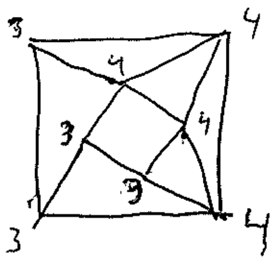


5) a) $|V_1| = |V_2| = 8$

$|E_1| = |E_2| = 14$

b) grader:





c) $G_1 = (V_1, E_1)$ $G_2 = (V_2, E_2)$

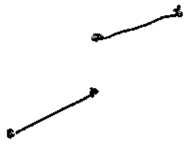
Låt $G_i' = \langle \{v \in V_i \mid \deg(v) = 4\} \rangle$

$K(G_1') = 2 \neq 1 = K(G_2')$

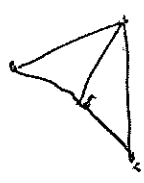
$\Rightarrow G_1' \not\simeq G_2'$

$\Rightarrow G_1 \not\simeq G_2$.

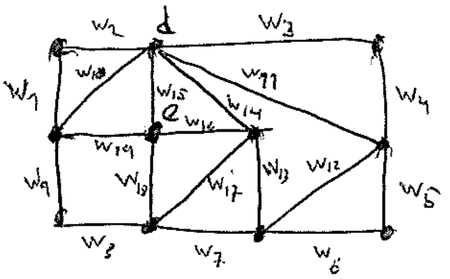
G_1'

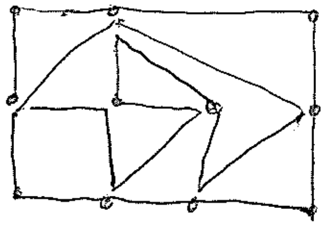


G_2'



20

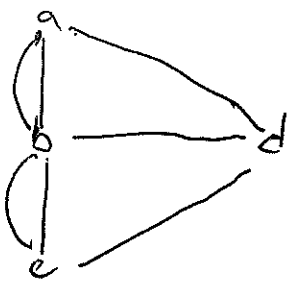
G: 



a) $W = (w_1, w_2, \dots, w_{19})$ är en lukket Eulervei i G

b) Låt G' vara grafen vi får genom att ta bort $\{d, e\} = w_{15}$. Då är $(w_{16}, w_{17}, w_{18}, w_{19}, w_1, w_2, \dots, w_{14})$ en Eulervei i G'.

22

G: 

Grader

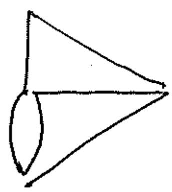
x	a	b	c	d
deg(x)	3	5	3	3

Vi har sett att G inte har någon Eulervei.

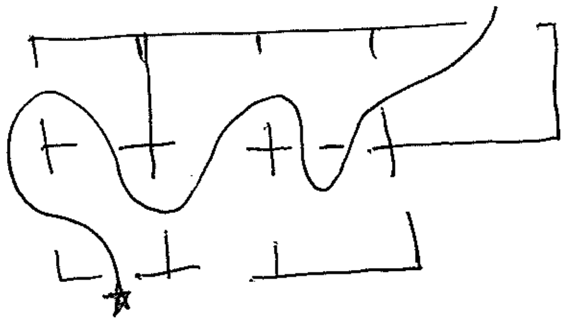
Om vi tar bort en kant mellan x och y $(x \neq y)$ så blir deg(x) och deg(y) jämna och det finns en Eulervei från z till w där

$$\{x, y, z, w\} = \{a, b, c, d\}$$

F. eks $x = a$, $y = b$:



23



Ja

10 Kan en bipartit graf ha en cykel av udda längd?

Svar: nej.

Låt $V = V_0 \cup V_1$, $E \subseteq \{\{a,b\} \mid a \in V_0 \wedge b \in V_1\}$,

$G = (V, E)$, och $V_0 \cap V_1 = \emptyset$.

Låt $x \in V_0$. En vei av längd m från x är en följd

$$(\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{m-1}, x_m\}) \quad \text{där } x_0 = x.$$

Vi visar $(*)\begin{cases} x_n \in V_0 & n: \text{jämn} \\ x_n \in V_1 & n: \text{udda} \end{cases}$ med induktion.

<u>Basfall</u> $n=0$ $\quad x_0 = x \in V_0$.

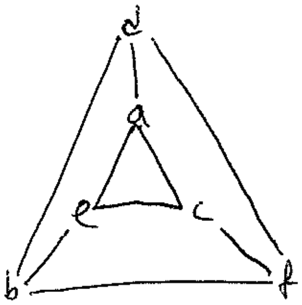
<u>Antag</u> $(*)$ för $n=k$.

Om k är jämn så är $k+1$ udda.
Eftersom $x_k \in V_0$ så är $x_{k+1} \in V_1$.

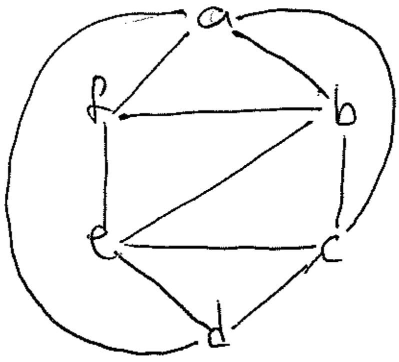
Om k är udda så är $k+1$ jämn.
Eftersom $x_k \in V_1$ så är $x_{k+1} \in V_0$.

Om $x_m = x$ så $x_m \in V_0$. Alltså är m jämn.
Alltså finns ingen lukket vei av udda längd från x till x. Fallet $x \in V_1$ följer av symmetri.

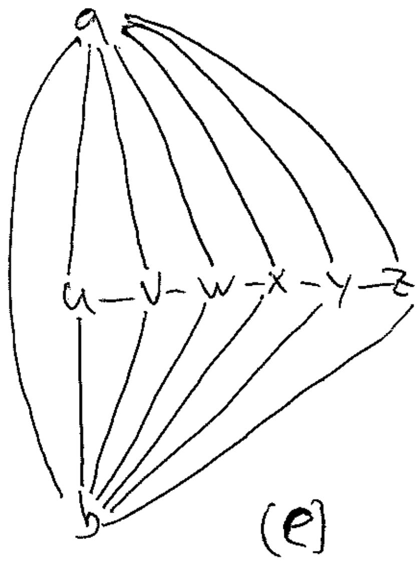
14 (b), (d), (e) är plana



(b)

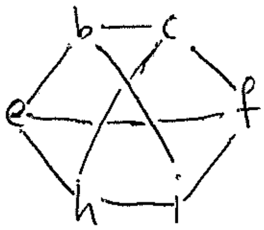


(d)



(e)

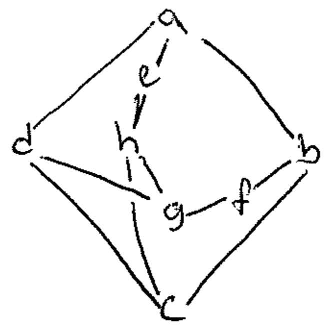
(a) är homeomorf med

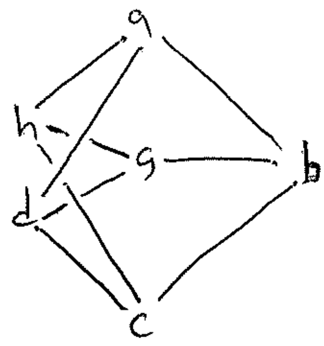
F: 

som är koplett bipartit enligt partisjonen $\{b, f, h\} \cup \{c, e, i\}$

$\Rightarrow \quad F \simeq K_{3,3} \rightarrow$ (a) ej plan

(c) har delgrafen: G som är homeomorf med G'

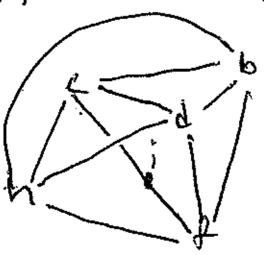
G : 

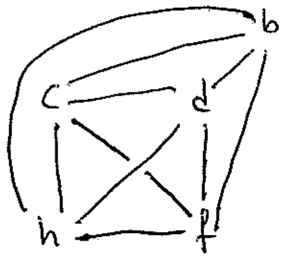
G' 

G' är komplett bipartit enligt partisjonen $\{a, g, c\} \cup \{h, d, b\}$

$\Rightarrow \quad G' \simeq K_{3,3} \quad \Rightarrow$ (c) ej plan.

(f) har delgrafen H som är homeomorf med H'

H 

H' 

$H' \simeq K_5 \Rightarrow$ (f) ej plan

18 $G=(V,E)$: sammanhängande, løkkefri.

G : tecknad i planet och har 53 sidor.

Varje sida avgränsas av minst 5 kanter.

Låt $v=|V|$, $e=|E|$ och s = antal sidor = 53.

Eftersom varje sida avgränsas av minst 5 kanter och varje kant gränsar till två sidor har vi

$$2e \geq 5 \cdot s \quad \Rightarrow \quad e \geq \frac{5}{2}s$$

Eulers formel ger

$$v = 2+e-s \geq 2+\frac{5}{2}s-s = 2+\frac{3s}{2} = 2+\frac{3\cdot 53}{2} = 2+\frac{159}{2}$$
$$= 2+80-\frac{1}{2} = 82-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow v \geq 82$ eftersom $v \in \mathbb{N}$.