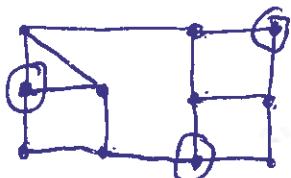


Övning 10

11.1 : 8

11.2 : 2, 3ab, 8, 9, 10, 11, 14

11.1, 8 Det är möjligt med 3 vakter:

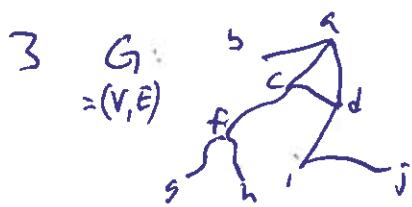


En vakt i nod x täcker $\deg(x) + 1$ noder, och för varje nod x gäller $\deg(x) \leq 3$. Med 2 eller färre vakter täcks som mest $2(3+1) = 8$ noder. Men det finns 11 noder. Alltså är 3 minsta möjliga.

11.2, 2. $G = (V, E)$: graf, $G_1 = (V_1, E_1)$ delgraf.

a) G_1 är inte inducerad om $G_1 \neq \langle V_1 \rangle$ dvs $\exists \{a, b\} \in E \setminus E_1$ så att $a, b \in V_1$.

b) F. exs.



c) En uppspärrad delgraf är t.ex par $G_1 = (V, E_1)$ där $E_1 \subseteq E$.

$|E| = 9 \Rightarrow$ Det finns 2⁹ sådana G_1 .

b) Om G_1 är sammanhängande så måste $E \setminus E_1 \subseteq \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$. Bland dessa fall ger 4 alternativ sammanhängande grader:

$$E \setminus E_1 = \{\{a, d\}\}, \quad E \setminus E_1 = \{\{a, c\}\}, \quad E \setminus E_1 = \{\{c, d\}\}, \quad E \setminus E_1 = \emptyset.$$

8 b) Vi söker veler w av längd m i K_n där $1 \leq m < n$, utan upprepade noder.

Låt v_0, v_1, \dots, v_m vara distinkta noder i K_n .

Eftersom K_n är komplett så är $\{e_i = \{v_{i-1}, v_i\}\}$ en kant i K_n för $1 \leq i \leq m$. Alltså är

$$w = (e_1, e_2, \dots, e_m)$$

en vei i K_n av längd m. Alla veler av längd m uppstår på detta sätt. Dessutom identifieras w med $(e_m, e_{m-1}, \dots, e_1)$.

Noderna v_0, v_1, \dots, v_m kan väljas på

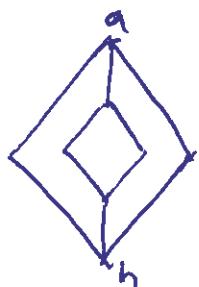
$$n(n-1) \cdots (n-m) = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ sätt.}$$

Alltså finns $\frac{n!}{2(n-m)!}$ av de sökta velerne

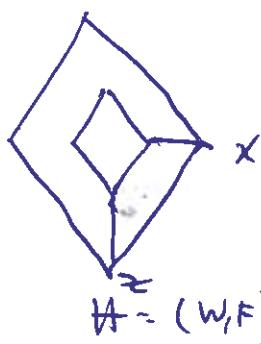
a) Från b) med $n=7$, $m=4$ har vi

$$\frac{7!}{2 \cdot 2!} = \frac{7!}{4} \text{ veler.}$$

9 a)



$$G = (V, E)$$

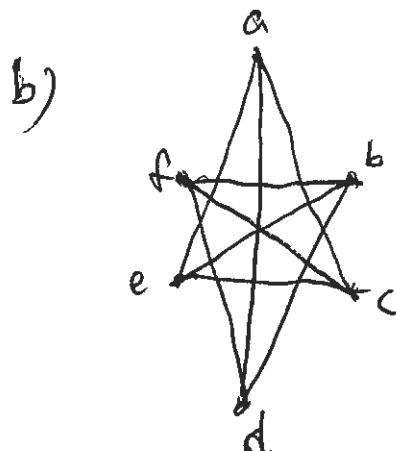


$$H = (W, F)$$

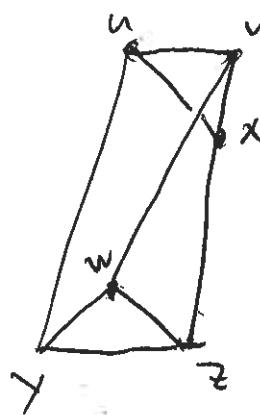
Noder av grad 3: G resp. H
är a, b resp. x, z.

Om $f: G \cong H$ så $\{f(a), f(b)\} = \{x, z\} \in F$

Men $\{a, b\} \notin E$. Alltså finns ingen sådan funksjon f och $G \not\cong H$.

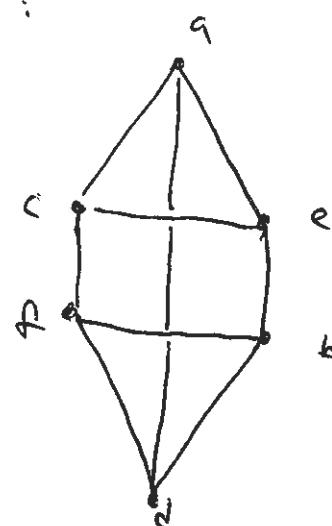
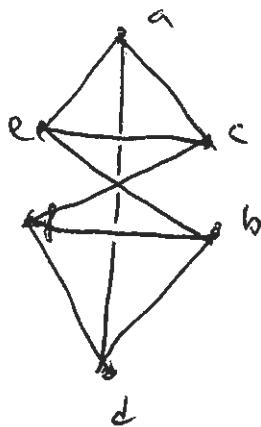


G



H

Vi flyttar noderne i G:



Genom att passa ihop trekanterna hittar vi:

$$f: G \xrightarrow{\sim} H$$

| α | a | b | c | d | e | f |
|-------------|---|---|---|---|---|---|
| $f(\alpha)$ | x | w | u | z | v | y |

10

$G = (V, E)$ löktefrei, $|V| = v$ och $|E| = e$. $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$

Enligt s_b finns $\frac{v!}{2(v-1)!} = \binom{v}{2}$ kanter i K_v

Dessa utgör $E \cup \overline{E}$. Eftersom $E \cap \overline{E} = \emptyset$ har vi:

$$|\overline{E}| = \binom{v}{2} - |E| = \binom{v}{2} - e.$$

11 a) $G_i = (V_i, E_i)$: löktefrei $i \in \{1, 2\}$ $\overline{G_i} = (\overline{V_i}, \overline{E_i})$

Låt $f: G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ och $a, b \in V_1$ så att $a \neq b$.

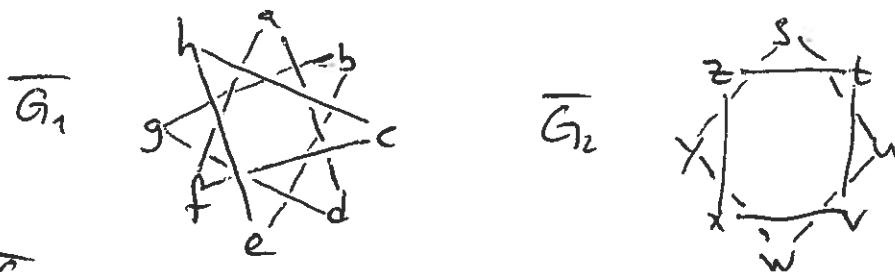
Då $\{a, b\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in E_2$ vilket ger

$\{a, b\} \in \overline{E_1} \Leftrightarrow \{a, b\} \notin E_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \notin E_2 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in \overline{E_2}$

Alltså $f: \overline{G_1} \xrightarrow{\sim} \overline{G_2}$. Vi har $\overline{G_1} \cong \overline{G_2} \Rightarrow \overline{G_1} \cong \overline{G_2} \Rightarrow G_1 \cong G_2$.

b) Låt G_1 och G_2 vara grafen i Figure 11.30.

Då



$\overline{G}_1 \neq \overline{G}_2$ eftersom $K(\overline{G}_1) = 1 \neq 2 = K(\overline{G}_2)$
 $\Rightarrow G_1 \neq G_2$ enligt a).

14 a) F. eks $G : \begin{matrix} 1 & 4 \\ \hline 2 & - & 3 \end{matrix} \Rightarrow \overline{G} \quad \begin{matrix} 1 & 4 \\ \diagup & \diagdown \\ 2 & & 3 \end{matrix}$

b) Antas $G = (V, E)$ inte är sammanhängande

Då $V = V_1 \cup V_2$ så att $V_1 \neq \emptyset \neq V_2$

och $a \in V_1, b \in V_2 (\{a, b\} \notin E)$

Vi skriva arb om $a \in V$ är sammanhängande med $b \in V$
 i $\overline{G} = (V, \overline{E})$. Låt $x \in V_1$ och $y \in V_2$.

Låt $a, b \in V$.

Om $(a \in V_1 \wedge b \in V_2) \vee (b \in V_1 \wedge a \in V_2)$ så $a \sim b$, eftersom $\{a, b\} \notin E$.

Om $a, b \in V_1$ så $a \sim x \sim b$

Om $a, b \in V_2$ så $a \sim x \sim b$

Alltså är \overline{G} sammanhängande