Løsningsforslag, øving 6

MA0301 Elementær diskret matematikk

Våren 2009

4.1.23

a. $P(n)$ er påstanden «n kan skrives som en sum av 2'ere og 5'ere», alternativt «det finnes k og l slik at $n = 2k + 5l$», alternativt

$$P(n): \exists k, l(n = 2k + 5l).$$

$P(2)$ og $P(4)$ er opplagt sanne. Vi skal starte induksjonen på $n = 4$.

Anta at $P(n)$ er sann for n, dvs. $n = 2k + 5l$ for heltall k og l. Anta videre at $n \geq 4$.

Vi må peke på passende k' og l' for å vise at $P(n+1)$ er sann. Hvis $l \geq 1$ får vi at

$$n + 1 = 2k + 5l + 1 = 2k + 5(l-1) + 5 + 1 = 2k + 5(l-1) + 2 \cdot 3 = 2(k+3) + 5(l-1),$$

altså at $k' = k + 3$ og $l' = l - 1$ duger. Hvis $l = 0$ må $k \geq 2$ fordi $n \geq 4$ og vi får at

$$n + 1 = 2k + 1 = 2(k-2) + 2 \cdot 2 + 1 = 2(k-2) + 5 \cdot 1,$$

altså at $k' = k - 2$ og $l' = 1$.

Altså har vi etablert at $\forall n \geq 4 : P(n) \to P(n+1)$. Siden $P(4)$ holder har vi ved matematisk induksjon at $\forall n \geq 4 : P(n)$. Altså holder $P(n)$ for alle ikke-negative heltall unntatt 1 og 3.

(Merk: Hvis vi tillater at k og l er negative holder $P(n)$ for alle heltall.)

b. Som for a.

7.3.10

Et eksempel er: