Løsningsforslag, øving 2

MA0301 Elementær diskret matematikk

Våren 2009

1.4.12

Vi skal finne antall løsninger på systemet

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40 \tag{1}$$

når (a) $x_i \geq 0$ eller (b) $x_i \geq -3$.

a. Summen $x_1 + x_2 + \cdots + x_5$ er alltid ikke-negativ når $x_i \geq 0$. Svaret er derfor antall løsninger på systemene $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = j$ med $0 \leq j \leq 40$, som vi enkelt kan summere opp.

Mer interessant er i stedet å gjøre om ulikheten til en likhet ved å innføre en ekstra variabel: Når $x_1 + \cdots + x_5 < 40$, da er $x_1 + \cdots + x_5 = 40 - x_6$, der $x_6 \geq 0$. Vi skriver dermed

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 40. \tag{2}$$

Enhver løsning på ulikheten (1) gir oss automatisk en løsning på (2), og omvendt.

b. Vi gjør et variabelbytte, $y_i = x_i + 3$. Når $x_i \geq -3$, da er $y_i \geq 0$. Vi legger til $5 \cdot 3$ på hver side i ulikheten (1) og får

$$\begin{aligned} (x_1 + 3) + (x_2 + 3) + \cdots + (x_5 + 3) &< 40 + 15, \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_5 &< 55. \end{aligned}$$

Det er klart at den nye ulikheten har like mange løsninger som den gamle. Antall løsninger finner vi som i a.

3.1.27

Russels paradoks er ikke noe virkelig paradoks, men beviser at S ikke er noen mengde. Det betyr at mengdebyggernotasjonen $\{x \mid \text{betingelse på } x\}$ ikke gir mengder for enhver betingelse. En vanlig begrensning er å si at vi bare godtar betingelser på formen «$x \in \mathscr{U}$ og ...», der $\mathscr{U}$ er en mengde.