Løsningsforslag, øving 1

MA0301 Elementær diskret matematikk

Våren 2009

1.1-1.2.3

a. Vi skal velge modell, farge, motorstørrelse og girkasse, med hhv. 4, 12, 3 og 2 valgmuligheter. Valgene er uavhengige av hverandre. Dette gir oss totalt $4 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 2 = 288$ valgmuligheter.

b. Vi får nå bare 1 valgmulighet for fargen, som gir oss $4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ valgmuligheter.

1.1-1.2.5

Fra Jennifers observasjoner har vi 2 muligheter for første bokstav og 1 mulighet for første siffer. Fra Tiffanys observasjoner har vi 2 muligheter for andre bokstav og to muligheter for siste siffer. For andre og tredje siffer har vi fortsatt ti muligheter. Valgene er uavhengige av hverandre. Dette gir oss $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 800$ muligheter.

1.1-1.2.9

Vi ser på følgende mengder: K = kaker, M = muffins, C = kaffevarianter, T = tevarianter, $D = C \cup T \cup \{\text{juice}, \text{kakao}\}$ = alle typer drikke og S = størrelsen på drikken. Det totale utvalget av drikke er da $D \times S$, det totale utvalget av bakverk er $B = K \cup M$.

Det er oppgitt at $|K| = 8$, $|M| = 6$, $|C| = 4$, $|T| = 6$ og $|S| = 3$, og vi ser at $|D| = |C| + |T| + 2$.

a. Mengden beskrevet er $B \times (D \times \{\text{medium}\})$ og vi får

$$|B \times (D \times \{\text{medium}\})| = |B| \cdot |D \times \{\text{medium}\}| = |B| \cdot |D| \cdot 1 = (8+6) \cdot 12 = 168.$$

b. Mengden beskrevet er $(B \times (C \times S)) \times (M \times (T \times S))$ og vi får

$$|B| \cdot |C| \cdot |S| \cdot |M| \cdot |T| \cdot |S| = 14 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 18144.$$

c. Mengden beskrevet er $(K \times (T \times S)) \times (M \times (\{\text{juice}\} \times S)) \times (B \times (C \times S))^2$ og vi får

$$|K| \cdot |T| \cdot |S| \cdot |M| \cdot 1 \cdot |S| \cdot (|B| \times |C| \times |S|)^2 = 73\,156\,608$$

(For en mengde X definerer vi X^2 til å være mengden $X \times X$.)

1.1-1.2.11

a. La R være mengden av mulige veier fra A til C. Vi kan dele denne mengden i to, direkteruter og ruter via B. Kall disse mengdene D og V. Vi vet at D og V er disjunkte og $R = D \cup V$. Videre ser vi med en gang at $|D| = 2$.

Det er fire måter å reise fra A til B på, og 3 måter å reise fra B til C på. Valgene er uavhengige. Altså er det 12 måter å reise fra A til C via B.

Vi får

$$|R| = |D \cup V| = |D| + |V| = 2 + 12 = 14.$$

b. Reiseruter fra A til C vil også være reiseruter fra C til A, dermed er vi ute etter mengden $R \times R$, og

$$|R \times R| = |R|^2 = 14 \cdot 14.$$

c. Vi er ute etter reiseruter der returen ikke følger samme reiserute som utreisen, altså par $(r, s) \in R \times R$ der $r \neq s$. La $\Delta = \{(r, r) \mid r \in R\}$, altså alle par av like reiseruter. Det er nettopp disse vi ikke ønsker å telle med, altså er mengden vi er ute etter lik $R \times R \setminus \Delta$. Vi får

$$|R \times R \setminus \Delta| = |R \times R| - |\Delta| = 14^2 - 14.$$

(For to mengder X og Y, der $Y \subseteq X$, så er $|X \setminus Y| = |X| - |Y|$.)

1.1-1.2.12

Permutasjonene er `act atc cat cta tac tca`, til sammen seks permutasjoner.

3.1.5

a. $(-1)^n$ tar bare verdiene 1 og -1 når n velges blant de naturlige tallene, altså tar uttrykket $1 + (-1)^n$ bare verdiene 0 og 2, og $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2\}$.

b. Se fasit.

c. Se fasit.

3.1.6

a. Partall pluss oddetall er oddetall. A og B er begge oddetallene, derfor er de like.

b. Partall minus oddetall er oddetall. C er også oddetallene.

c. Når $A = B$ og $A = C$, da må $B = C$.

d. Observer at $1 \in D$. Hvis $3s + 2 = 1$, da må $s = -1/3$, men $-1/3 \notin \mathbb{Z}$, derfor er $1 \notin E$. Vi har pekt på et element som er i D, men ikke i E. Dermed er $D \neq E$.

e. Gitt et element $3r + 1 \in D$ der $r \in \mathbb{Z}$, da er $3r + 1 = 3r + 3 - 2 = 3(r + 1) - 2 \in F$ siden $r + 1 \in \mathbb{Z}$. Altså er $D \subseteq F$. Tilsvarende viser vi at $F \subseteq D$ og dermed at $D = F$.

f. Siden $D = F$ og $D \neq E$ må $E \neq F$.

3.1.17

Bevisene for at (a) $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$ medfører $A \subseteq C$ og (b) $A \subsetneq B$ og $B \subseteq C$ medfører $A \subsetneq C$ er gitt i boken.

c. Hvis $A \subseteq B$ og $B \subsetneq C$, da er $A \subsetneq C$.

Siden $B \subsetneq C$, da finnes det et element $c \in C$ slik at $c \notin B$. Siden alle elementene i A også er i B, da kan ikke $c \in A$, altså finnes det et element $c \in C$ slik at $c \notin A$, og dermed er $A \subsetneq C$.

d. Hvis $A \subsetneq B$ og $B \subsetneq C$, da er $A \subsetneq C$.

Hvis $A \subsetneq B$, da er $A \subseteq B$ og resultatet følger fra c.

3.1.20

a. La F være mengden av følger som starter med 1 og slutter med 7. La $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

I en strengt voksende følge kan ikke to påfølgende elementer være like. Hver strengt voksende følge som begynner med 1 og slutter med 7 kan altså skrives på formen $1, i_1, i_2, \ldots, i_n, 7$, der $i_1, i_2, \ldots, i_n$ er n forskjellige tall mellom 1 og 7. Altså er $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ en delmengde av A med n elementer. Det betyr at til enhver følge i F hører en delmengde av A.

Hvis vi har to forskjellige følger $1, i_1, i_2, \ldots, i_n, 7$ og $1, j_1, j_2, \ldots, j_m, 7$ må det være et tall som er med i den ene følgen, men ikke i den andre. Dermed vil de tilhørende mengdene $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ og $\{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$ være forskjellige.

Hvis vi har en delmengde B av A med l elementer, kan vi ordne elementene i B i stigende rekkefølge som $k_1, k_2, \ldots, k_l$. Det betyr at mengden B hører til følgen $1, k_1, k_2, \ldots, k_l, 7$ i F.

Dermed har vi etablert at til enhver følge F hører nøyaktig én delmengde av A, og enhver delmengde av A tilhører en følge i F. Det betyr at det er nøyaktig like mange elementer i F som det finnes delmengder av A, eller

$$|F| = |\mathscr{P}(A)| = 2^5.$$

b., c. og **d.** Bruk tilsvarende argument som i første deloppgave.

3.2.5

a. Ethvert positivt heltall er også et positivt rasjonalt tall.

b. Dette følger fordi $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{Q}$.

c. Ethvert rasjonalt tall er også et reelt tall.

d. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$, men $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

e. Dette følger fordi $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{R}^+$ (ethvert positivt rasjonalt tall er også et positivt reelt tall).

f. Dette følger fordi $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{R}^+$.

g. Dette følger fordi $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{C}$.

h. $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, men $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

i. $0 \in \mathbb{Z}$, men $0 \notin \mathbb{Q}^*$.