4.6:1 Integrér ved delvis integrasjon eller substitusjon. Sjekk svaret.

$$\int 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x.$$

**Løsning:**
Forsøker delvis integrasjon:

$$u = x, \quad v' = 4e^{4x}.$$

$$\begin{aligned}\int 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x &= \int uv'\,\mathrm{d}x \\ &= uv - \int vu'\,\mathrm{d}x \\ &= xe^{4x} - \int e^{4x}\cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= xe^{4x} - \frac{1}{4}e^{4x} + C \\ &= \left(x - \frac{1}{4}\right)e^{4x} + C.\end{aligned}$$

Sjekker svaret:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\left(x-\frac{1}{4}\right)e^{4x} + C\right) &= e^{4x} + 4\left(x - \frac{1}{4}\right)e^{4x} + 0 \\ &= 4xe^{4x}.\end{aligned}$$

Ok.

Ekstraoppgaver 4g Integrér

$$\int (xe^x - 2x\cos x)\,\mathrm{d}x.$$

**Løsning:**
Forøker delvis integrasjon:

$$u = x, \quad v' = e^x - 2\cos x.$$

$$
\begin{aligned}
\int (xe^x - 2x\cos x)\,\mathrm{d}x &= \int x(e^x - 2\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int uv'\,\mathrm{d}x \\
&= uv - \int vu'\,\mathrm{d}x \\
&= x(e^x - 2\sin x) - \int (e^x - 2\sin x)\cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= x(e^x - 2\sin x) - (e^x + 2\cos x) + C \\
&= (x-1)e^x - 2\cos x - 2x\sin x + C.
\end{aligned}
$$

Sjekker svaret:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((x-1)e^x - 2\cos x - 2x\sin x + C\Big) &= e^x + (x-1)e^x + 2\sin x - 2(\sin x + x\cos x) + 0 \\
&= xe^x - 2x\cos x.
\end{aligned}
$$

Ok.

$\boxed{\text{Ekstraoppgaver 4h}}$ Integrér

$$
\int \left(\frac{1}{x} + x^2e^x + x\sin(2x)\right)\,\mathrm{d}x.
$$

**Løsning:**
Vi har at

$$
I := \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C
$$

og ved delvis integrasjon er

$$
\begin{aligned}
K &:= \int x\sin 2x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.
\end{aligned}
$$

Bruker delvis integrasjon to ganger for å beregne det midterste leddet:

$$
\begin{aligned}
J &:= \int x^2e^x\,\mathrm{d}x \\
&= x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x \\
&= x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C \\
&= (x^2 - 2x + 2)e^x + C.
\end{aligned}
$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1}{x}+x^2e^x+x\sin(2x)\right)\,\mathrm{d}x &= I+J+K\\ &= \ln|x|-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+(x^2-2x+2)e^x+C.\end{aligned}$$

Sjekker svaret:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln|x|-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+(x^2-2x+2)e^x+C\right)\\ &=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\cos 2x-2x\sin 2x)+\frac{1}{2}\cos 2x+(2x-2)e^x+(x^2-2x+2)e^x\\ &=\frac{1}{x}+x\sin 2x+x^2e^x.\end{aligned}$$

Ok.

$\boxed{\text{5.3:22}}$ Avgjør om det uegentlige integraler konvergerer. I såfall finn dets verdi.

$$\int_1^\infty \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

**Løsning:**
Substitusjonen

$$u=t^2+1$$

gir $\mathrm{d}u=2t\,\mathrm{d}t$, så

$$\int\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln|u|+C=\ln(t^2+1)+C.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{b\to\infty}\Big|_1^b \ln(t^2+1)\\ &= \lim_{b\to\infty}\big(\ln(b^2+1)-\ln 2\big)\\ &=\infty\end{aligned}$$

fordi $\ln x\to\infty$ når $x\to\infty$. Altså, $\int_1^\infty\frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ divergerer.

$\boxed{\text{5.7:7}}$ Finn funksjonen $y=y(x)$ slik at

$$y'=x^2+2x-3,\qquad y(0)=4.$$

**Løsning:**

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + 2x - 3 \\ &\Rightarrow \\ y &= \int (x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C. \end{aligned}$$

Initsialbetingelsen gir at

$$4 = y(0) = C$$

og løsningen er derfor

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4.$$