Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere
Høst 2014

Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{\text{4.1:19}}$ Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C, \qquad x > 0.$$

$\boxed{\text{4.2:23 a)}}$ Tilnærm arealet under grafen til

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

på intervallet [1,7] ved å beregne arealet av hvert av de seks rektanglene til fire desimalers nøyaktighet (se figur s. 408 i boken), og deretter summere.

Løsning:
La $i = 1, 2, \ldots, 6$, $x_i = i$ og la $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 1$. Arealet, A, under grafen er da tilnærmet lik

$$\begin{aligned}
A_6 &\approx \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{6} f(i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2} \\
&= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} \\
&\approx 1 + 0.25 + 0.1111 + 0.0625 + 0.04 + 0.0278 \\
&= 1.4914
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{4.2:23 b)}}$ Tilnærm arealet under grafen til

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

på intervallet [1,7] ved å beregne arealet av hvert av de tolv rektanglene til fire desimalers nøyaktighet (se figur s. 408 i boken), og deretter summere.

Løsning:
La $i = 0, 2, \ldots, 11$, $x_i = 1 + i/2$ og la $\Delta x = x_{i+1} - x_i = 1/2$. Arealet, A, under grafen er da tilnærmet lik

$$\begin{aligned}
A_{12} &\approx \sum_{i=0}^{11} f(x_i)\Delta x \\
&= \sum_{i=0}^{11} f(1+i/2)1/2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{11} \frac{1}{(1+i/2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{11} \frac{4}{(2+i)^2} \\
&= 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{169}\right) \\
&\approx 1.1418
\end{aligned}$$

Vi ser at $A_{12} < A_6$ og fra figuren ser vi at det virkelige arealet, A, er mindre enn A_{12}, så A_{12} må være en bedre tilnærming enn A_6.

Additional exercises. 2 Vis at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{\cos x}, && \text{definisjon av } \tan x \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\cos x - \sin x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)}{\cos^2 x}, && \text{brøkregel} \\
&= \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x.}
\end{aligned}$$

Additional exercises. 3a Derivér funksjonen

$$f(x) = x^5 + 2\sin x.$$

Løsning:

$$f'(x) = 5x^4 + 2\cos x.$$

$\boxed{\text{Additional exercises. 4b}}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int x^5 + \frac{5}{x^5} + \frac{2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Vi har at

$$\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C,$$

$$\int \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int x^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

og fra oppgave 2 har vi at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

Dermed er

$$\int x^5 + \frac{5}{x^5} + \frac{2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} - \frac{5}{4x^4} + 2\tan x + C.$$