2.7:5 Derivér implisitt for å finne $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Finn deretter stigningstallet til kurven i det gitte punktet.

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad (\sqrt{3}, \sqrt{2}).$$

Løsning:
Vi merker først at punktet virkelig ligger på kurven, fordi $\sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3 - 2 = 1$. Vi antar at y-verdiene til kurven rundt dette punktet kan beskrives som en funksjon av x, dvs. $y = y(x)$. Da vil $x^2 - y^2(x) = 1$ for alle x i nærheten av dette punktet medføre at

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - y^2(x)) \\ &= 2x - 2y(x)y'(x) \end{aligned}$$

dvs.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y}$$

og stigningstallet er da

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y)=(\sqrt{3},\sqrt{2})} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2.7:45 En stige som er 26 enheter lang (drit i fot) står oppreist mot en vertikal vegg. Hvor raskt vil den øvre enden skli ned langs veggen når den nedre enden skyves med en hastighet på 5 enheter/s fra veggen akkurat i det tidspunktet den nedre enden er 10 enheter fra veggen?

Løsning:
Hvis x er avstanden fra den nedre enden av stigen til veggen og y er avstanden fra toppen av stigen ned til gulvet, så er begge disse variablene funksjoner av tid. Men pga. Pytagoras, vil de to variablene alltid oppfylle

$$x^2 + y^2 = 26^2.$$

Vi ønsker å finne hastigheten av toppen av stigen langs veggen. Dvs. vi ønsker å finne $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$. Vi deriverer implisitt, og finner at

$$2xx' + 2yy' = 0$$

der $' = \mathrm{d}/\,\mathrm{d}t$. Dvs. $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t = -xx'/y$, og når den nedre enden er 10 enheter fra veggen, altså $x = 10$, og har hastighet $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 5$, så er

$$y = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$$

og hastigheten langs veggen er dermed

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x,y,x')=(10,24,5)} = -\left.\frac{xx'}{y}\right|_{(x,y,x')=(10,24,5)} = -\frac{10 \cdot 5}{24} = -\frac{25}{12}$$

enheter i sekundet.

Ekstra:
Akkurat denne oppgaven kan også løses *uten* bruk av implisitt derivasjon. Følgende løsning kan kanskje være mer intuitiv forståelig, men en fremgangsmåte som dette er ikke alltid mulig i slike type oppgaver:

Hvis vi lar avstanden fra den nedre enden av stigen til veggen, ved tiden t, være gitt ved

$$x(t) = 5t$$

så er hastigheten x' konstant lik 5 og høyden til toppen av stigen over gulvet er

$$y(t) = \sqrt{26^2 - x^2(t)} = \sqrt{26^2 - 25t^2}.$$

Videre er

$$y'(t) = -\frac{\cancel{2} \cdot 25t}{\cancel{2}\sqrt{26^2 - 25t^2}},$$
$$x(t) = 10 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 2$$

og verdien vi er ute etter er

$$\begin{aligned} y'(2) &= -\frac{25 \cdot 2}{\sqrt{26^2 - 25 \cdot 2^2}} \\ &= -\frac{25}{12}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{3.1:27}}$ Derivér

$$G(x) = 7 + 3e^{5x}.$$

Løsning:

$$G'(x) = 0 + 3 \cdot 5e^{5x} = 15e^{5x}.$$

$\boxed{\text{3.2:70}}$ Derivér

$$g(x) = (\ln x)^3.$$

Løsning:

$$g'(x) = 3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$$

$\boxed{3.5{:}12}$ Derivér

$$f(x) = 12^{7x-4}.$$

Løsning:
Skriv

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\ln(12^{7x-4})} \\ &= e^{(7x-4)\ln(12)} \\ &= e^{7\ln(12)x-4\ln(12)} \\ &\Rightarrow \\ f'(x) &= 7\ln(12)e^{7\ln 12x-4\ln 12} \\ &= 7\ln(12)12^{7x-4} \end{aligned}$$

hvis du ikke ønsker å huske regelen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln(a)a^x$ utenatt. Regelen kan uansett ikke brukes direkte, men hvis vi lar g være funksjonen gitt ved

$$g(x) = 12^x,$$

så er $g'(x) = \ln 12 \cdot 12^x$. Videre er $f(x) = g(7x-4)$ og vi kan bruke kjerneregelen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(7x-4) \\ &= g'(7x-4) \cdot 7 \\ &= \ln 12 \cdot 12^{7x-4} \cdot 7. \end{aligned}$$