Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere
Høst 2014

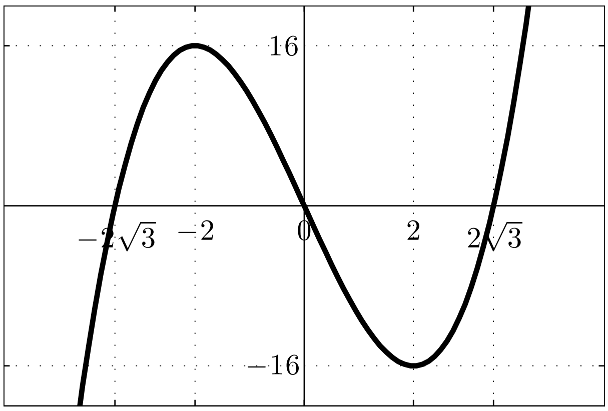
Løsningsforslag — Øving 4

$\boxed{2.2{:}9}$ Skissér grafen til

$$f(x) = x^3 - 12x$$

og finn koordinatene til ekstremalpunktene og hvor grafen har vendepunkter. Finn ut hvor funksjonen er stigende og synkende og hvor den er konkav og hvor den er konveks.

Løsning:
Vi finner ekstremalpunktene:



Figur 1: Grafen til $y = x^3 - 12x$

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) \\ &= 3x^2 - 12 \\ &= 3(x^2 - 4) \\ &= 3(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Kandidater for **ekstremalpunkter** til f er $x = \pm 2$ med y-verdi $(f(x) = x(x^2 - 12))$

$$f(\pm 2) = \pm 2(4 - 12) = \mp 16.$$

At dette virkelig er (lokale) ekstremalpunkter kan enkelt vises ved første- eller andrederiverttesten.

Kandidater for vendepunkter er der $f''(x)$ er null eller ikke eksisterer:

$$f''(x) = 6x,$$

så ettersom $f''(x)$ skifter fortegn ved $x = 0$ har grafen et **vendepunkt i origo**. Dette er også det eneste vendepunktet.

Fra det faktoriserte uttrykket til f' ser vi at (tegn fortegnslinje) at f er **stigende** på $(-\infty, -2)$, **synkende** på $(-2, 2)$ og **stigende** på $(2, \infty)$. Og fra uttrykket til f'' ser vi at f er **konkav** på $(-\infty, 0)$ og **konveks** på $(0, \infty)$.

I tillegg kan vi bruke at f er en **odd funksjon** til hjelp for å skissere grafen. Dvs. at grafen er symmetrisk om origo:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 12(-x) \\ &= -x^3 + 12x \\ &= -(x^3 - 12x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Det er også til hjelp å bruke at f har nullpunkter i $x = 0$ og i $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$.

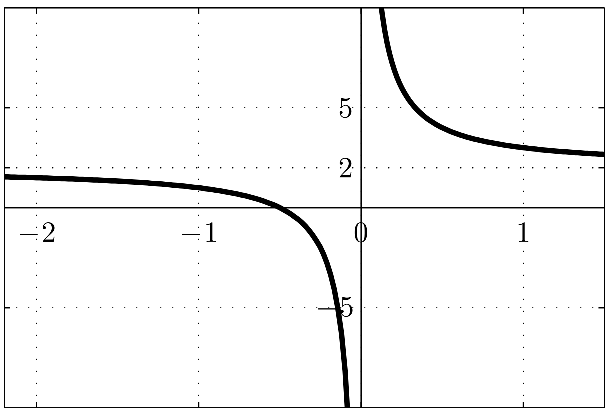
$\boxed{\text{2.3:32}}$ Skissér grafen til

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

og finn koordinatene til ekstremalpunktene og hvor grafen har vendepunkter. Finn ut hvor funksjonen er stigende og synkende og hvor den er konkav og hvor den er konveks. Finn eventuelle asymptoter og hvor grafen krysser koordinataksene.

Løsning:

For det første ser vi at domenet til f er $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dvs. mengden av alle $x \neq 0$.



Figur 2: Grafen til $y = \frac{2x+1}{x}$

Kandidater til ekstremalpunkter er der f' er null eller ikke eksisterer:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x - (2x+1)}{x^2} \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Vi ser at $f'(x)$ aldri er null og at $f'(x)$ ikke eksisterer for $x = 0$. Eneste mulighet for ekstrema er da i $x = 0$, men ettersom $0 \notin \mathcal{D}(f)$ kan vi konkludere at f har **ingen ekstremalpunkter**.

Vi finner eventuelle vendepunkter:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-2} \\ &= -(-2)x^{-3} \\ &= \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

Igjen er dette aldri null, og $f''(x)$ eksistere ikke for $x = 0 \notin \mathcal{D}(f)$. Altså, f har **ingen vendepunkter.**

Fra uttrykket til f' ser vi at f er **synkende** på $(-\infty, 0)$ og **synkende** på $(0, \infty)$. (merk at det er galt å si at f er synkende på $\mathcal{D}(f)$ ettersom $\mathcal{D}(f)$ ikke er et interval.)

Fra uttrykket til f'' ser vi at f er **konkav** på $(-\infty, 0)$ og **konveks** på $(0, \infty)$. (likevel er ikke $x = 0$ et vendepunkt.)

Horisontale asymptoter:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(2 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} 2 + \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} \\ &= 2 + 0 = 2. \end{aligned}$$

$y = 2$ er den eneste **horisontale asymptoten** til f.

Vi ser at $x = 0$ er den eneste **vertikale asymptoten** fordi

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(2 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \infty \end{aligned}$$

og fordi f er definert for alle andre x.

f har **ingen skrå asymptoter** fordi $f = \frac{p}{q}$ er en rasjonal funksjon der $\deg p = \deg q \neq \deg q + 1$.

Skjæring med x-akse:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) \\ &= \frac{2x+1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \\ 0 &= 2x + 1, \qquad x \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

f's eneste **nullpunkt** er $x = -1/2$, men grafen til $f(x)$har **ingen skjæring med y-aksen.** All denne informasjonen bør gjøre oss i stand til å skissere en graf som ligner grafen i figur 2.

$\boxed{\text{2.4:7}}$ Finn absolutt minimum og maksimum til funksjonen

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 3, \qquad x \in [-1, 0].$$

Løsning:
Finner kritiske punkter:

$$\begin{aligned}
0 &= f'(x) \\
&= 3x^2 - 2x - 1 \\
&= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \\
&\Longleftrightarrow \\
0 &= x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}, \quad \text{fullfører kvadratet} \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}, \quad \text{– et alternativ til andregradsformelen} \\
&\Longleftrightarrow \\
x - \frac{1}{3} &= \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \\
&= \pm\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Dvs. $x = 1$ eller $x = -\frac{1}{3}$. f' er definert for alle $x \in [-1, 0]$, så det eneste kritiske punktet er

$$c = -\frac{1}{3}.$$

f er kontinuerlig på det lukkede intervallet $[-1, 0]$. Ved teorem 8 side 251, finnes da de absolutte ekstremalverdiene blant tallene

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -1 - 1 + 1 + 3 = 2, \\
f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 3 \\
&= \frac{1}{27}(-1 - 3 + 9 + 81) \\
&= \frac{86}{27} = 3 + \frac{5}{27} \qquad \text{og} \\
f(0) &= 3.
\end{aligned}$$

Absolutt maksimum er da $\frac{86}{27}$ i $x = -\frac{1}{3}$ og **absolutt minimum** er 2 i $x = -1$.

$\boxed{\text{2.6:27}}$ La

$$y = f(x) = x^2, \qquad \Delta x = 0.01.$$

Finn Δy og $f'(x)\Delta x$ til en nøyaktighet på henholdsvis fire og to desimaler når $x = 2$.

Løsning:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x)\\ &= (x + \Delta x)^2 - x^2\\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2\\ &= 0.04 + 0.0001\\ &= 0.0401\end{aligned}$$

eksakt.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= f'(x)\Delta x\\ &= 2x\Delta x\\ &= 0.04.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{2.6:35}}$ Bruk at $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ for å finne en tilnærming til tallet $\sqrt{26}$.

Løsning:
Ideén er at $26 \approx 25$ og at vi kjenner verdien til $\sqrt{25}$: La funksjonen f være definert som

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Vi ønsker å finne en tilnærming til tallet $f(26)$. La $\Delta x = 1$ og $x = 25$. Da er

$$\begin{aligned}\sqrt{26} &= f(x + \Delta x)\\ &= f(x) + \Delta y\\ &\approx f(x) + f'(x)\Delta x\\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x\\ &= \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 1\\ &= 5 + \frac{1}{10}\\ &= 5.1\end{aligned}$$

(Merk at vi har funnet en utrolig god tilnærming til $\sqrt{26} = 5.0990195...$ *uten* bruk av kalkulator!)