Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere
Høst 2014

Løsningsforslag — Øving 10

$\boxed{1.3{:}5}$ Skriv et system av ligninger som er ekvivalent med vektorligningen

$$x\begin{pmatrix}6\\-1\\5\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-7\\-5\end{pmatrix}.$$

Løsning:
Ved definisjonen av skalarmultiplikasjon og ved definisjon av likhet av vektorer, er vektorligningen ekvivalent med systemet

$$\begin{aligned}6x-3y&=1\\-x+4y&=-7\\5x&=-5.\end{aligned}$$

$\boxed{1.3{:}9}$ Skriv en vektorligning som er ekvivalent til systemet

$$\begin{aligned}y+5z&=0\\4x+6y-z&=0\\-x+3y-8z&=0.\end{aligned}$$

Løsning:
Av samme grunn som over, er dette systemet ekvivalent med vektorligningen

$$x\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}5\\-1\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\boxed{1.4{:}1}$

Løsning:
Produktet er ikke definert ettersom matrisen har 2 kolonner, mens vektoren har 3 elementer.

$\boxed{\text{1.4:7}}$ Skriv vektorligningen

$$x\begin{pmatrix}4\\-1\\7\\-4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-5\\3\\-5\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\-8\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-8\\0\\-7\end{pmatrix}$$

som en matriseligning.

Løsning:
La A være matrisen

$$A=\begin{pmatrix}4&-5&7\\-1&3&-8\\7&-5&0\\-4&1&2\end{pmatrix}$$

og la $\mathbf{b}$ være vektoren

$$\mathbf{b}=\begin{pmatrix}6\\-8\\0\\-7\end{pmatrix}.$$

Da er vektorligningen ekvivalent med

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

der

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{1.4:14}}$ La

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

og

$$A=\begin{pmatrix}5&8&7\\0&1&-1\\1&3&0\end{pmatrix}.$$

Ligger $\mathbf{u}$ i undermengden av $\mathbb{R}^3$ generert (spanned) av kolonnene til A?

Løsning:

Ved radreduksjon av den utvidede matrisen $[A, \mathbf{u}]$ finner vi at

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 5 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -7 & 7 & -8 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -29 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

og vi ser at lignignen $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ har ingen løsning. Derfor er $\mathbf{u}$ **ikke** en lineærkombinasjon av kolonnene til A, dvs. $\mathbf{u}$ ligger ikke i undermengden generert av kolonnene til A.