Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere
Høst 2013

Løsningsforslag — Øving 9

5.3:2

$$\int_4^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{\mathrm{R}\to\infty}[-x^{-1}]_4^R = \lim_{\mathrm{R}\to\infty}(-R^{-1}) - (-1/4) = 0 + 1/4 = 1/4.$$

5.3:24 Vi skal finne

$$\int_1^\infty \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,\mathrm{dx}\,.$$

Vi substituerer $u = x^3 + 1$, slik at $du = 3x^2dx$, slik at integralet vårt blir

$$\int_1^\infty \frac{3x^2}{(x^3+1)^2}\,\mathrm{dx} = \int_2^\infty \frac{1}{u^2}\,\mathrm{du}$$
$$= \lim_{\mathrm{R}\to\infty}[-u^{-1}]_2^R = \lim_{\mathrm{R}\to\infty}(-R^{-1}) - -(1/2) = 0 + 1/2 = 1/2.$$

Legg merke til at vi har skiftet ut grensene i integralet med u.

5.7:7

$$y' = x^2 + 2x - 3,\ \ y(0) = 4.$$

Vi finner den generelle løsningen ved å integrere:

$$y = \int (x^2 + 2x - 3)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C.$$

Så finner vi konstanten C ved initialbetingelsen:

$$y(0) = \frac{1}{3}0^3 + 0^2 - 3\cdot 0 + C = 4,$$

slik at $C = 4$. Dette gir partikulærløsning

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 4.$$

5.7:9

$$f'(x) = x^{2/3} - x,\ \ f(1) = -6.$$

Igjen finner vi først den generelle løsningen:

$$f(x) = \int (x^{2/3} - x)\,\mathrm{dx} = \frac{3}{5}x^{5/3}1\frac{1}{2}x^2 + C.$$

Så finner vi konstanten C:

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} + C = -6 \\ \implies C &= -6 - \frac{3}{5} + \frac{1}{2} = -\frac{61}{10}, \end{aligned}$$

som betyr at løsningen er

$$f(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{61}{10}.$$

$\boxed{5.7.30}$ Vi skal finne den generelle løsningen av ligningen

$$\frac{dP}{dt} = 4P.$$

Vi separerer variablene, og integrerer:

$$\begin{aligned} &\frac{dP}{4P} = dt \\ \implies &\int \frac{dP}{4P}\,\mathrm{d}P = \int \mathrm{d}t \\ \implies &\frac{1}{4}\ln P = t + C \\ \implies &\ln P = 4t + C' \\ \implies &P(t) = \mathrm{e}^{4t+C'} = K\mathrm{e}^{4t}. \end{aligned}$$

Her har vi først satt $4C = C'$, og så $\mathrm{e}^{C'} = K$.