Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere Høst 2013

Løsningsforslag — Øving 5

Oppg. 50, side 259 Vi skal finne absolutt max/min for funksjonen $f(x) = 30x - x^2$ på $(-\infty, \infty)$. For å finne disse punktene deriverer vi: $f'(x) = 30 - 2x$, som er 0 når $x = 15$. Siden $f''(x) = -2 < 0$ er dette et toppunkt, og funksjonsverdien er da $f(15) = 225$. Funksjonen har ingen absolutte minimumspunkt.

Oppg. 1, side 273 Her skal vi finne maksimum av $Q = xy$, gitt at $x+y = 50$. Det enkleste da er å skrive $y = 50 - x$, og sette inn i utrykket for Q: $Q(x) = x(50 - x)$. Har da at $Q'(x) = 50 - 2x$, som gir at $x = 25$ er et ekstremalpunkt. Siden $Q''(x) = -2 < 0$, er dette et maksimumspunkt, og vi har at den største verdien for Q er $Q = 25 \cdot 25 = 650$.

Oppg. 6, side 292 Vi er gitt kurven $x^2 + y^2 = 1$. Vi deriverer implisitt m.h.p x:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) \\ \Longrightarrow\ &2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \\ \Longrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

I punktet $(1/2, \sqrt{3}/2)$ har vi da stigningstallet $-\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = -1/\sqrt{3}$.

Oppg. 33 side 292

$$\begin{aligned} R(x) &= 50x - 0.5x^2 \\ C(x) &= 4x + 10 \end{aligned}$$

Vi deriverer R og C implisitt m.h.p t og får da

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= 50\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}x = 50 \cdot 20 - 30 \cdot 20 = 400, \\ \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} &= 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4 \cdot 20 = 80. \end{aligned}$$

Siden profitten P er gitt ved $P = R - C$, har vi $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = 400 - 80 = 320$.

Oppg. 44 side 294 Vi har at avstanden mellom bilene er gitt ved $D^2 = x^2 + y^2$. Deriverer vi denne ligningen implisitt m.h.p tiden t, får vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(D^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y^2)$$
$$\implies 2D\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Skriver vi $x'$for $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (og samme med y og D) får vi

$$D' = \frac{x'x + y'y}{D}$$

Etter én time har bilene reist henholdsvis 25 og 65 miles, slik at avstanden mellom dem er $D = \sqrt{25^2 + 65^2} = 65$ miles. Setter vi dette inn i ligningen over får vi

$$D' = \frac{25 \cdot 25 + 65 \cdot 65}{65} = 65,$$

slik at avstanden mellom bilene øker med 65 miles per time etter en time.