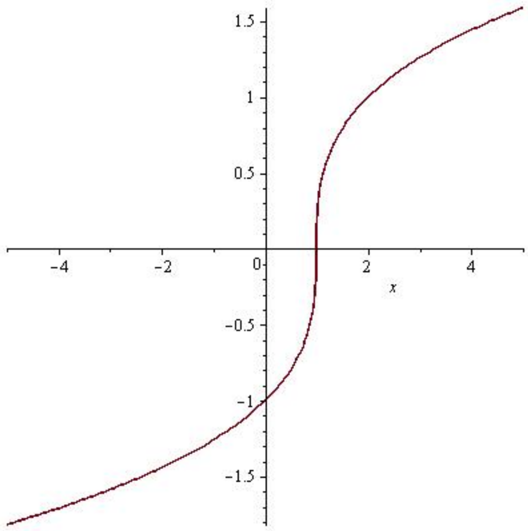
Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

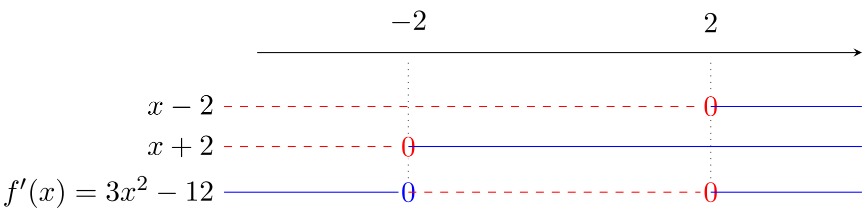
Oppg. 23, side 212 Her skal vi finne ekstremalpunkt for funksjonen $F(x) = \sqrt[3]{x-1} = (x-1)^{1/3}$. Vi har at $F'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} > 0$. Dette betyr at $F'(x)$ aldri er 0, og dermed har ikke F ekstremalpunkt. Under er funksjonen plottet.



Oppg. 9, side 231 La $f(x) = x^3 - 12x$. For å finne ekstremalpunkter, undersøker vi når den deriverte er null: $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$. Dette gir at $f'(x) = 0$ når $x = -2$ og $x = 2$, og f har ekstremalpunkt der. For å undersøke om disse er maksimum eller minimum, undersøker vi den andrederiverte. $f''(x) = 6x$, som gir at $f''(-2) = -12 < 0$ og $f''(2) = 12 > 0$. Dette gir, etter innsetting i $f(x)$, at $(-2, 16)$ er et maksimumspunkt, og $(2, -16)$ er et minimumspunkt for f.

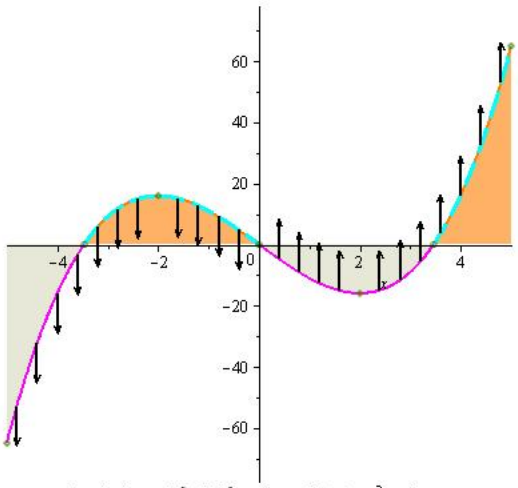
Den andrederiverte gir oss også at f er konkav opp (konveks) når $x > 0$ og konkav ned når $x < 0$.

For å undersøke hvor f er stigende og synkende, tegner vi fortegnsskjema for $f'(x)$:



Dette gir at f er stigende på $(-\infty, -2)$ og $(2, \infty)$, men minskende på intervallet

$(-2, 2)$. Under er et plot at f, med vendepunkt, konkavitet og fortegnet til stigningstallet markert.



On the interval $[-5, 5]$, a chart of $f(x) = x^3 - 12x$.

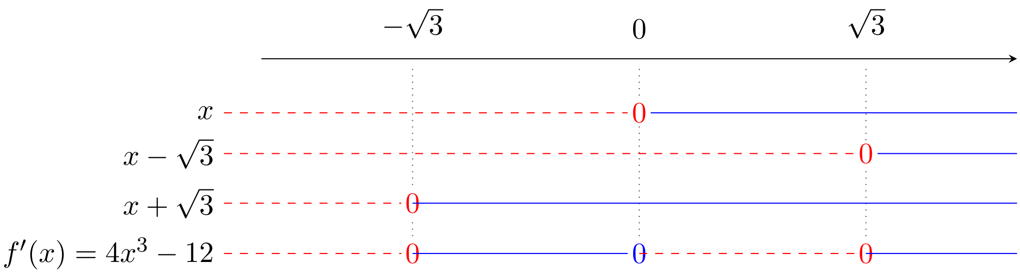
Oppg. 19, side 231 Vi har $f(x) = x^4 - 6x^2$, som enkelt gir at $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ etter å ha faktorisert.

Da $f'(x) = 0$ i $x = 0, \sqrt{3}$ og $x = -\sqrt{3}$, vet vi at funksjonen har ekstremalpunkt der. Vi må bruke andrederiverttesten for å finne ut om dette er maksimum eller minimum.

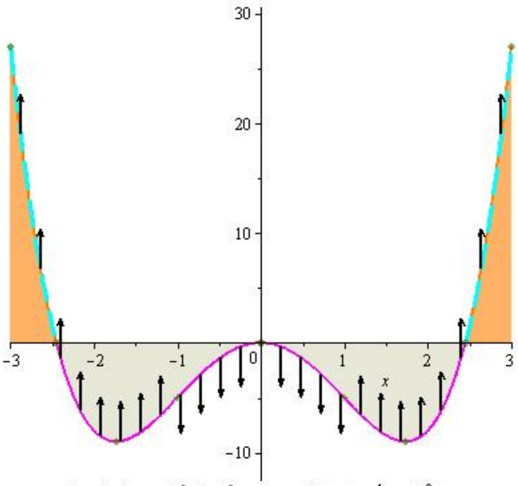
Siden $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$, har vi at $f''(x) < 0$ når $-1 < x < 1$, og $f''(x) > 0$ når $x > 1$ eller $x < -1$. Dette gir at f er konkav opp (konveks) på $x > 1$ eller $x < -1$, og konkav ned på $(-1, 1)$.

Videre gir andrederivertesten at f har et (lokalt) minimum i $(-\sqrt{3}, 9)$ og $(\sqrt{3}, -9)$, siden $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -9$. Siden $f''(0) = -12 < 0$, gir også andrederiverttesten at f har et lokalt maksimum i $(0, 0)$.

For å å finne ut hvor funksjonen øker og minsker, tegner vi fortegnsskjema for $f'(x)$:

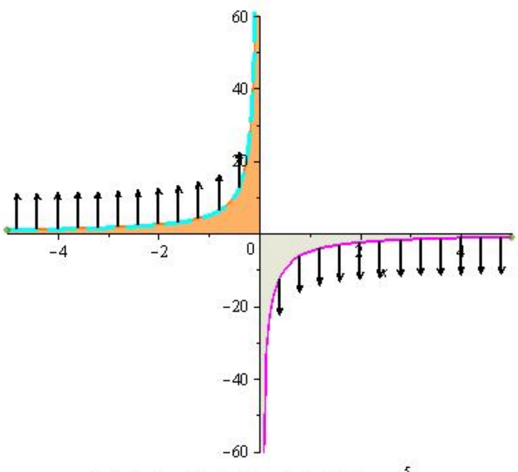


Vi har da at f minsker på $(-\infty, -\sqrt{3})$ og $(0, \sqrt{3})$, og at den øker på $(-\sqrt{3}, 0)$ og $(\sqrt{3}, \infty)$. Under er et plot av funksjonen, med vendepunkt, konkavitet og fortegnet til stigningstallet markert.



On the interval [-3, 3], a chart of $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Oppgg. 23, side 246 La $f(x) = -\frac{5}{x}$. Vi har da at $f'(x) = 5/x^2$, og $f''(x) = -10/x^3$. Siden $f'(x) > 0$ for alle x, har ikke f noen kritiske punkt, samt at $f(x)$ er stigende for alle x. Videre har vi at $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, slik at $y = 0$ er en asymptote for f. Fra $f''(x) = -10/x^3$ ser vi at f er konkav opp når $x < 0$ og konkav ned når $x > 0$. Under følger et plot av funksjonen, med vendepunkt, konkavitet og fortegnet til stigningstallet markert.



On the interval [-5, 5], a chart of $f(x) = -\frac{5}{x}$.

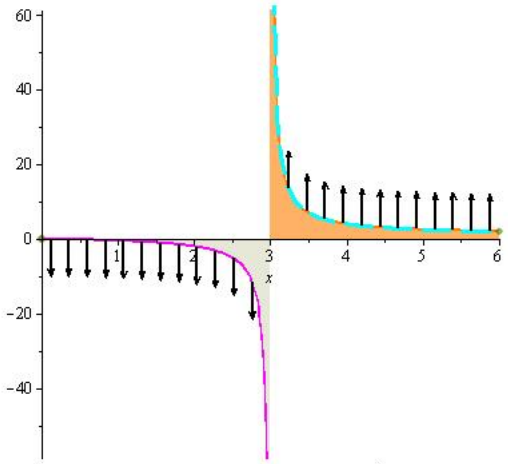
Oppg. 38 side 247 Vi har at $f(x) = x/(x-3)$, med derivert $f'(x) = -3/(x-3)^2$. Siden den deriverte er negativ for alle x, er f synkende for alle x. Enn videre har vi at $f''(x) = -6/(x-3)^3$, som betyr at f er konkav opp for $x < 0$ og konkav ned for $x > 0$. For å finne asymptoter ser vi at

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x}} = 1,$$

slik at linjen $y = 1$ er horisontal asymptote for f. Vi ser videre at

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty,$$

som betyr at linjen $x = 3$ er en vertikal asymptote. Et plot av funksjonen følger under.



On the interval [0, 6], a chart of $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$.