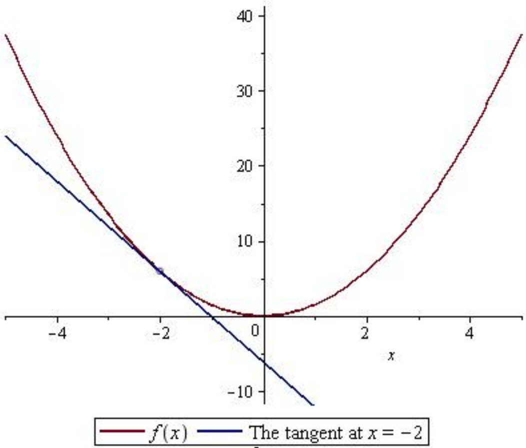
MA0003 Brukerkurs i matematikk for informatikere
Høst 2013

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

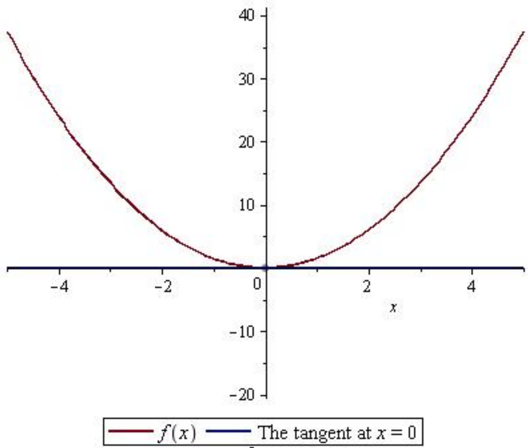
Løsningsforslag — Øving 3

Opg. 1, side 141

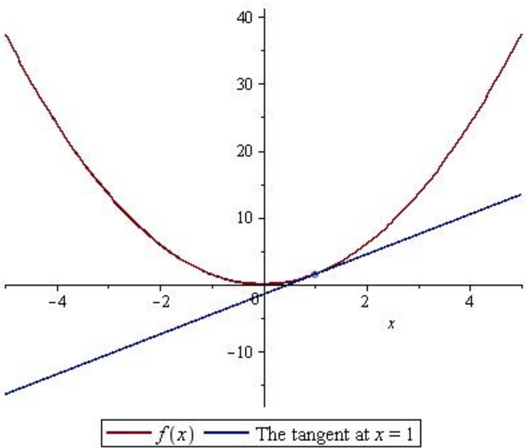
a) **b)** Vi skal plotte og finne tangenter i til funksjonen $f(x) = 3/2x^2$ i punktene $x = -2, x = 0$ og $x = 1$. Grafen med de tre tangentene finner du under.



At $x = -2$, for the function $f(x) = \frac{3}{2}x^2$, a graph of $f(x)$ and a tangent line.



At $x = 0$, for the function $f(x) = \frac{3}{2}x^2$, a graph of $f(x)$ and a tangent line.



At $x = 1$, for the function $f(x) = \frac{3}{2}x^2$, a graph of $f(x)$ and a tangent line.

c) Vi har at

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}(x+h)^2 - \frac{3}{2}x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{2}(x^2+2xh+h^2) - \frac{3}{2}x^2}{h} \\
\lim_{h\to 0} &\left(3x + \frac{3}{2}h\right) = 3x.
\end{aligned}
$$

d) Vi har at $f'(-2) = -6$, $f'(0) = 0$ og $f'(1) = 3$. Vi ser fra grafen til tangentene at dette stemmer over ens med stigningstallet til tangenen i punktene.

$\boxed{\text{Opg. 31, side 154}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(5x^2 - 7x + 3\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^2) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3) \\
&= 10x - 7.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Opg. 12, side 163}}$ Vi skal derivere funksjonen $G(t) = \left(2t + 3\sqrt{t} + 5\right)\left(\sqrt{t} + 4\right)$ på to forskjellige måter, og kontrollere svarene.

a) Først bruker vi produktregelen. Vi lar $u(t) = 2t + 3\sqrt{t} + 5$ og $v(t) = \sqrt{t} + 4$, slik at $u'(t) = 2 + \frac{3}{2\sqrt{t}}$ og $v'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Dette gir

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\
&= \left(2 + \frac{3}{2\sqrt{t}}\right)\left(\sqrt{t} + 4\right) + \left(2t + 3\sqrt{t} + 5\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \\
&= 2\sqrt{t} + 8 + \frac{3}{2} + \frac{6}{\sqrt{t}} + \frac{2}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{t}} \\
&= 3\sqrt{t} + 12 + \frac{17}{2\sqrt{t}}.
\end{aligned}
$$

b) Så forsøker vi å trekke sammen utrykket, og derivere ledd for ledd. Vi har at $G(t) = \left(2t + 3\sqrt{t} + 5\right)\left(\sqrt{t} + 4\right) = 2t\sqrt{t} + 8t + 3t + 12\sqrt{t} + 5\sqrt{t} + 20$, som gir at $G'(t) = 3\sqrt{t} + 12 + \frac{17}{2\sqrt{t}}$. Vi ser at dette stemmer med svaret fra a).

$\boxed{\text{Opg. 25, side 174}}$ Vi vil derivere funksjonen $g(x) = (3x-1)^7(2x+1)^5$. Her kunne vi ganget ut parentesene, og så trukket sammen utrykket og derivert ledd for ledd, men det blir veldig mye arbeid. Vi vil bruke produktregelen, og lar derfor $u(x) = (3x-1)^7$ og $v(x) = (2x+1)^5$. Kjerneregelen gir da at

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= 7(3x-1)^6 \cdot 3 = 21(3x-1)^6 \\
v'(x) &= 5(2x+1)^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4.
\end{aligned}
$$

Vi får derfor at

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 21(3x-1)^6(2x+1)^5 + 10(2x+1)^4(3x-1)^7 \\ &= (3x-1)^6(2x+1)^4[21(2x+1) + 10(3x-1)]. \end{aligned}$$

Opg. 23, side 182 Vi vil finne den andrederivrte til funksjonen $f(x) = \sqrt[4]{(x^2+1)^3} = (x^2+1)^{\frac{3}{4}}$. Kjerneregelen gir oss

$$f'(x) = \frac{3}{4}(x^2+1)^{\frac{3}{4}-1} \cdot 2x = \frac{3}{2}x(x^2+1)^{-\frac{1}{4}}.$$

Videre gir produktregelen at

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{4}} + \frac{3}{2}x\left[-\frac{1}{4}(x^2+1)^{-\frac{1}{4}-1} \cdot 2x\right] \\ &= \frac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{1}{4}} - \frac{3}{4}x^2(x^2+1)^{-\frac{5}{4}}. \end{aligned}$$