Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under prøven: Steffen junge
TLF: 73 59 17 73 / 94 16 27 27

Midtsemesterprøve i MA0003 - Høst 2009

Dato: mandag 12. oktober 2009
Tid: 10:15 – 11:45
Hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Ett gult stemplet håndskrevet A4-ark
Bokmål

Oppgavesett m. Løsninger

Prøven består av ti oppgaver med fire svaralternativer til hver. Bare ett av alternativene er riktig i hver oppgave. Svarene avkrysses på et eget svar ark. Riktig svar gir +2 poeng og feil svar gir −1 poeng. Settes flere kryss i en oppgave teller det −1 selvom et av kryssene er riktig. Husk å oppgi hvilket oppgavesett A,B,C,D eller E du besvarer.

Oppgave 1 Hva er $\log_3 9$?

Løsning. Siden $9 = 3^2$ er $\log_3 9 = 2$. På samme måte er $\log_2 8 = 3$, $\log_5 25 = 2$ og $\log_7 7 = 1$ i de andre oppgavesettene. ■

Oppgave 2 Hva er tangentligningen for $y = x^3$ i punktet $(-1, -1)$?

Løsning. Den deriverte i $x = -1$ er $3x^2|_{x=-1} = 3$ så tangentligningen er

$$y + 1 = 3(x + 1)$$

Omskrevet gir dette $y = 3x + 2$. ■

Oppgave 3 La $f(t) = t \ln t - t$. Hva er $f'(t)$?

Løsning.

$$f'(t) = \ln t + t\frac{1}{t} - 1 = \ln t$$

■

Oppgave 4 Gitt at $x + y = 4$ hva er da minst mulige verdi av $x^2 + y^2$?

Løsning. Siden $x+y = 4$ er $y = 4-x$ og vi skal derfor minimere $K(x) = x^2+(4-x)^2 = 2x^2-8x+16$. Dette er en parabel der grenene peker ned så vi har faktisk et minimum der $K'(x) = 0$.

$$K'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Og derfor er minste verdi av $x^2 + y^2$ lik $K(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 16 = 8$. ■

Oppgave 5 Hva er $F(x) = \int 3x^2 + 2x + 1\, dx$?

Løsning.

$$F(x) = x^3 + x^2 + x + C$$

■

Oppgave 6 Hva kan vi ved delvis integrasjon omforme integralet $\int x^2 e^x\, dx$ til?

Løsning. Siden

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

får vi ved å sette $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^2$ at

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx.$$

■

Oppgave 7 Utfører vi substitusjonen $u = x^2 + 3$ på integralet $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$ ender vi opp med:

Løsning. Vi beregner:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{1}{2}\,du = x\,dx$$

Dermed får vi

$$\int x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$

■

Oppgave 8 Uttrykket $y^2 + 2x^2 = 2$ er en implisitt løsning av hvilken differensialligning?

Løsning. Deriverer vi implisitt får vi

$$2y \cdot y' + 4x = 0$$

Som omskrevet blir:

$$y' = -\frac{2x}{y}$$

■

Oppgave 9 Hva er h.h.v. største og minste verdi av $P(x) = x^2 - 3$ på intervallet $(-1, 2]$.

Løsning. Siden $P'(x) = 2x$ bare er null i null har vi kritiske punkt for P i $x = -1, 0, 3$. Siden $P(0) = -3$, $P(2) = 1$ og $P(x) \to -2$ når $x \to -1$ er største verdi 1 og minste verdi -3. ■

Oppgave 10 La funksjonen $y = F(x)$ være en løsning av initialverdiproblemet

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 1$$

Hva er tangentligningen for F i punktet $(0, 1)$?

Vink: Det er ikke nødvendig å finne et uttrykk for F.

Løsning. Den deriverte av F i $(0, 1)$ er gitt ved differensialligningen:

$$F'(0) = y'|_{(x,y)=(0,1)} = 0^2 - 1^2 = -1$$

Hermed er tangentligningen $((y - y_0 = \alpha(x - x_0))$:

$$y - 1 = -x$$

Som omskrevet blir $y = -x + 1$. ■