Innhold

1 Differensialligninger **3**
1.1 Generellt om differensialligninger 3
1.2 Antiderivasjon 5
1.3 Regneregler for antideriverte 7
1.4 Delvis integrasjon 9
1.5 Substitusjon 11
1.6 Partikulære løsninger av $y' = f(x)$ 14
1.7 Separable differensialligninger 18

2 Numeriske metoder **25**
2.1 Newtons metode 25
2.2 Eulers metode 32
2.3 Modifisert Euler 38

Kapittel 1

Differensialligninger

1.1 Generellt om differensialligninger

Definisjon 1.1.1. *En 1. ordens differensialligning er en ligning*

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

der $G(x, y)$ er et uttrykk som avhenger av x og y. En løsning *av differensialigningen er en* ligning *i variablene x og y som tilfredstiller differensialligningen.*

Vi vil vanligvis skrive y' i stedet for $\frac{dy}{dx}$. Eksempler på differensialligninger kan være:

$$y' = 2x, \quad y' = -\frac{y}{x}$$

Eksempel 1.1.2 Vis at $x^2 + y^2 = 1$ er en løsning av $y' = -\frac{x}{y}$.

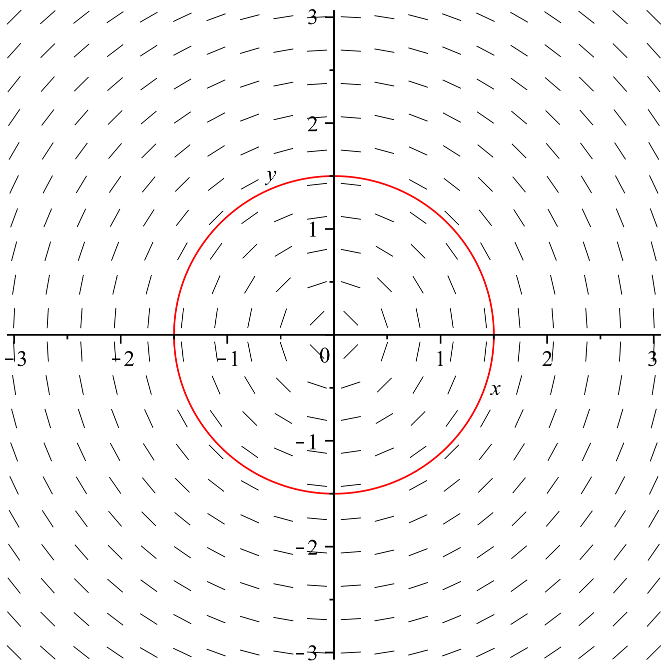
Deriverer vi implisitt m.h.p. x får vi:

$$2x + 2yy' = 0$$

Som opplagt giver $y' = -\frac{x}{y}$. Hermed opfyller $x^2 + y^2 = 1$ differensialligningen vår og er en løsning. ■

Som vi ser av ovenstående eksempel kan den deriverte i en differensialligning avhenge av både av x og y. En kan tolke en differensialligning som en ligning der i ethvert punkt (x, y) i planet angir et stigningstall y'. En *løsning* av differensialligningen er da en ligning i variablene x og y hvis graf i punktet (x, y) har en tangent med stigningstall y' som angitt av differensialligningen. En kan på denne måte visualisere differensialligningen ved å tegne et *tangentkart*. Et tangentkart konstrueres ved å velge seg et passende utvalg av punkter i planet. I hvert punkt (x, y) avsettes en liten bit av en rett linje med stigningstall y' som angitt av differensialligningen. *Løsninger* av ligningen vil da være kurver som smyger seg langs disse linjene, det vil si kurver som har disse linjestykkebne som tangenter.

Eksempel 1.1.3 Tangentkartet for differensialligningen $y' = -\frac{x}{y}$ ser ut som:



Som indikert er løsningene sirkler sentrert i $(0, 0)$. ■

Vi skal ikke her bruke mer tid på generell teori om differensialligninger, men hellere belyse temaet ved å se på den enkleste typen av differensialligninger, nemlig det tilfellet der $y' = f(x)$. Det vil si tilfellet der den deriverte bare avhenger av x. Vi skal etterhvert se på litt mer generelle differensialligninger.

Oppgaver

Oppgave 1.1.4. *En differensialligning tilskriver i ethvert punkt (x, y) et stigningstall y'. Avsett i de følgende oppgaver i et passende utvalg av punkter (x, y) en liten bit av en rett linje med stigningstall y' som angitt i den enkelte oppgave. Løsninger vil være kurver som har disse linjestykkene som tangenter. Prøv i hvert tilfelle å gjette hva løsningene er og verifiser din gjettning.*

1. $y' = 1$

2. $y' = y$
3. $y' = -\frac{x}{y}$

1.2 Antiderivasjon

Den enkleste form for differensialligninger er som nevnt av typen $y' = f(x)$. Det som gjør dette tilfellet spesiellt enkelt er at vi med en gang ser hva en løsning må oppfylle. For dersom $F(x)$ er en funksjon som oppfyller $F'(x) = f(x)$ ser vi lett at alle $y = F(x) + C$ løser vores differensialligning:

$$y' = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x).$$

Å løse $y' = f(x)$ dreier seg med andre ord om å finne en funksjon $F(x)$ hvis deriverte er lik f. Denne prosessen kalles *antiderivasjon* og er som navnet antyder den det motsatte av derivasjon. Uheldigvis kan ikke denne prosessen automatiseres på samme måte som derivasjon og en vil ofte oppleve at det slett ikke finns noen funksjon F slik at $F'(x) = f(x)$. Et enkelt eksempel på dette er gitt ved funksjonen $f(x) = e^{x^2}$.

Egentlig bør vi være litt mer presis her for en kan vise at enhver kontinuerlig f rent faktisk *har* en antiderivert F. I tilfellet $f(x) = e^{x^2}$, og mange andre, er problemet at vi ikke kan uttrykke den antideriverte F, som definitivt eksisterer, ved hjelp av kjennte funksjoner.

Definisjon 1.2.1. *Vi definerer den* antideriverte *til en kontinuerlig funksjon f som en funksjon F som oppfyller $F'(x) = f(x)$. Vi innfører følgende skrivemåte for F:*

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Prosessen å finne antiderivert kalles ofte å integrere f. F kalles ofte det ubestemte integral *av f.*

Bemerkning 1.2.2. *Det er viktig å innse at gitt en antiderivert $F(x)$ vil alle $F(x)+C$ også være antiderverte (Hvorfor?). Vi baker alltid inn denne konstanten i uttrykket*

$$\int f(x)\,dx$$

Eksempelvis er

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Der vi med skrivemåten antyder at C er en ubestemt konstant.

Vi runder av denne seksjonen med å angi noen viktige antideriverte:

Setning 1.2.3. *Vi har følgende antideriverte*

$$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq 1$$
$$\int e^x \, dx = e^x + C$$
$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

Bevis. Deriver høyresidene og sjekk at du får det riktige (overlates til leseren). □

Eksempel 1.2.4 Funksjonen $f(x) = x^3$ er av formen x^a der $a = 3$. Reglen over gir da:

$$\int f(x) \, dx = \int x^3 \, dx = \frac{1}{3+1} x^{3+1} + C = \frac{1}{4} x^4 + C$$

■

Oppgaver

Oppgave 1.2.5. *Finn følgende antideriverte:*

$$i) \int x \, dx \quad ii) \int \sqrt{x} \, dx \quad iii) \int x^{-2.301} \, dx \quad iv) \int 1 \, dx \quad v) \int x^{-1} \, dx$$

Oppgave 1.2.6. *Derivasjon av antideriverte:*

1. *Deriver*
$$\int \frac{x+1}{x-1} \, dx$$

2. *Hva er stigningstallet til*
$$\int e^{x^2} \, dx$$
i x=0?

3. *Vis at*
$$\int 2x e^{x^2} \, dx = e^{x^2} + C$$

Oppgave 1.2.7. *Bevis setning 1.2.3*

1.3 Regneregler for antideriverte

Vi ønsker selvsagt å kunne finne antideriverte for litt fler funksjoner enn de som vi anga i foregående seksjon. I denne seksjon skal vi se på de enkleste teknikker som gjør oss istand til å behandle summer og differenser og spesiellt enkle sammensetninger av funksjoner. Uheldigvis finns ikke som tilfellet er for derivasjon noen *generelle* regler for hvordan produkt av funksjoner, brøker av funksjoner eller sammensetning av funksjoner kan antideriveres. Hvordan vi skal angripe slike tilfeller er temaet for senere seksjoner. For øyeblikket nøyer vi oss med følgende regler:

Setning 1.3.1. *La f og g være kontinuerlige funksjoner og la $c \neq 0$ være en konstant. Da gjelder:*

1. $$\int c \cdot f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

2. $$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

3. $$\int f(cx)\,dx = \frac{1}{c} F(cx) + C$$

4. $$\int f(x+c)\,dx = F(x+c) + C$$

Der F angir en antiderivert for f.

Bevis. Deriver høyresiderne og sjekk at du får det riktige (overlates til leseren). □

Selvom de to siste reglene her er spesialtilfeller av en teknikk kallet *substitusjon* er de så mye brukt av vi angir dem her som egne regler. Substitusjon gjemmer vi til seksjon 1.5. Vi tar i det følgende noen eksempler på bruken av ovenstående regler 1-4 samt et eksempel der vi kombinerer disse.

Eksempel 1.3.2 Vi vil finne den *generelle* antideriverte til $h(x) = 6x^2$. Ved å bruke regel 1 med $c = 6$ får vi:

$$\int 6 \cdot x^2\,dx = 6 \cdot (2x + C) = 12x + C'$$

■

Bemerkning 1.3.3. *Hvorfor har det ikke betydning om vi skriver C' eller $6C$ i ovenstående eksempel*

Eksempel 1.3.4 Vi vil finne den generelle antideriverte til $g(t) = t^3 - e^t$. Ved å bruke regel 2 får vi:

$$\int t^3 - e^t \, dt = \int t^3 \, dt - \int e^t \, dt = \frac{1}{4}t^4 + C_1 - (e^t + C_2) = \frac{1}{4}t^4 - e^x + C$$

Der vi har slått differensen mellom konstantene C_1 og C_2 sammen til C. ■

Eksempel 1.3.5 Vi vil finne den generelle antideriverte til $h(x) = e^{-2x}$. Dersom $f(x) = e^x$ er $h(x) = f(-2x)$ og siden $F(x) = e^x$ er en antiderivert til e^x får vi ved å bruke regel 3:

$$\int e^{-2x} \, dx = F(-2x) + C = \frac{1}{-2}e^{-2x} + C = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

■

Eksempel 1.3.6 Vi vil finne den generelle antideriverte til $p(x) = \frac{1}{x-2}$. Dersom $f(x) = \frac{1}{x}$ er $p(x) = f(x-2)$ og siden $F(x) = \ln x$ er en antiderivert til $\frac{1}{x}$ får vi ved å bruke regel 4:

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = F(x-2) + C = \ln(x-2) + C$$

■

Eksempel 1.3.7 Vi vil finne den generelle antideriverte til

$$f(x) = 3x^{0.5} + \sqrt{x+2}.$$

Vi får ved bruk av regnereglene våre

$$\begin{aligned}
\int f(x) \, dx &= \underbrace{\int 3\sqrt{x} \, dx}_{\text{regel 1}} + \underbrace{\int \sqrt{x+2} \, dx}_{\text{regel 4}} \\
&= 3 \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} + \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + C \\
&= 2x\sqrt{x} + \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + C
\end{aligned}$$

■

Å bruke reglene i denne seksjonen bør ideelt sett sitte på samme måte som derivasjonsreglene. Det vil si du bør ideelt sett kunne anvende dem nesten uten å tenke først. Kan du dette vil de mer avanserte anderivasjonsteknikkene føles vesentlig lettere. Det finns desværre ikke mange snarveier i matematikk og også her er løsningen å regne ***mange*** oppgaver før teknikkene *sitter i fingrene*.

Oppgaver

Oppgave 1.3.8. *Kontroller svaret i alle eksemplene i denne seksjonen.*

Oppgave 1.3.9. *Finn:*

$$i)\int 2e^x\,dx \quad ii)\int \frac{4}{x}-x^{-6}\,dx \quad iii)\int 5\sqrt[3]{x}\,dx \quad iv)\int \frac{x^2+e^x}{\pi}\,dx$$

Oppgave 1.3.10. *Finn:*

$$i)\int e^{-x}\,dx \quad ii)\int \frac{1}{2x}-(x+1)^{-6}\,dx \quad iii)\int 5\sqrt[3]{2x}\,dx \quad iv)\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

Oppgave 1.3.11. *Vis setning 1.3.1.*

1.4 Delvis integrasjon

I denne seksjon skal vi se på hvordan vi i noen tilfeller kan finne antideriverte til produkt av funksjoner. Metoden kalles delvis integrasjon og er på et vis en parallell til produktregelen i derivasjon. Forskellen fra derivasjon er at selvom produktregelen for derivasjon *alltid* fungerer er delvis integrasjon bare anvendelig i noen tilfeller.

Setning 1.4.1. *La f være kontinuerlig og g en deriverbar funksjon. Da er*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

der F er en antiderivert til f.

Bevis. Deriver høyresiden og kontroller at du får det riktige svaret.(overlates til leseren) □

Umiddelbart ser det ikke ut som om delvis integrasjon fører til noe som helst. Skal vi finne en antiderivert for $f(x)g(x)$ må vi finne både F og en antiderivert for $F(x)g'(x)$. Ikke desto mindre viser det seg ofte i praksis at dette er vesentlig lettere en å finne en antiderivert for $f(x)g(x)$ direkte.

Eksempel 1.4.2 Finn

$$\int xe^x\,dx$$

Lar vi $f(x) = e^x$ og $g(x) = x$ er $F(x) = e^x$ og dermed ifølge setning 1.4.1:

$$\int xe^x\,dx = \underbrace{e^x}_{F(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} - \int \underbrace{e^x}_{F(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)}\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

■

Eksempel 1.4.3 Finn

$$\int (3x^2+1)\ln x\,dx$$

Lar vi $f(x) = 3x^2+1$ og $g(x) = \ln x$ er $F(x) = x^3+x$ og dermed ifølge setning 1.4.1:

$$\begin{aligned}\int (x^2+1)\ln x\,dx &= \underbrace{(x^3+x)}_{F(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{(x^3+x)}_{F(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\,dx \\ &= (x^3+x)\ln x - \int x^2+1\,dx \\ &= (x^3+x)\ln x - (\frac{x^3}{3}+x+C)\end{aligned}$$

■

Det kan også være nødvendig å bruke delvis integrasjon flere ganger etter hverandre:

Eksempel 1.4.4 Finn

$$\int x^2e^x\,dx$$

Benytter vi delvis integrasjon med $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^2$ får vi:

$$\int x^2e^x\,dx = e^x x^2 - \int e^x 2x\,dx = x^2e^x - 2\underbrace{\int xe^x\,dx}_{I}$$

Benytter vi delvis integrasjon enda en gang for å finne I får vi:

$$I = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Dermed får vi følgende løsning på vårt problem:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2I = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C'$$

■

Hele vitsen med delvis integrasjon er at

$$\int F(x) g'(x) \, dx$$

ofte er vesentlig lettere å betstemme enn

$$\int f(x) g(x) \, dx.$$

Delvis integrasjon gir oss derfor i mange tilfeller en måte å forenkle problemet å finne antideriverte.

Oppgaver:

Oppgave 1.4.5. *Kontroller svaret i alle eksempler i denne seksjonen.*

Oppgave 1.4.6.

$$i) \int x \ln x \, dx \quad ii) \int 1 \cdot \ln x \, dx \quad iii) \int 4\sqrt{x} \ln x \, dx \quad iv) \int x^2 e^{-x} \, dx$$

Oppgave 1.4.7. *Vis setning 1.4.1.*

1.5 Substitusjon

Vi sa i foregående avsnitt at delvis integrasjon er analogt til produktregelen for derivasjon. I dette avsnittet skal vi se en teknikk kallet delvis integrasjon som er analog til kjerneregelen i derivasjon. Teknikken kalles substitusjon og virker ofte ved første øyekast nesten litt magisk.

Setning 1.5.1. *Anta F er antiderivert til en funksjon f. Da er:*

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(u) + C|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C$$

Bevis. Overlates til leseren. (Deriver høyresiden) □

Setningen over sier at når integranden har formen $f(g(x))g'(x)$ kan vi finne en antiderivert ved å antiderivere f alene og deretter innsette $g(x)$ som variabel i denne F. Delvis integrasjon kan altså brukes i tilfeller der en funksjon $g(x)$ og dens deriverte $g'(x)$ opptrer samtidig.

Eksempel 1.5.2 Finn
$$\int 2xe^{x^2}\,dx$$
Vi ser at her at både x^2 og dens deriverte $2x$ opptrer i integranden, og dersom $f(x) = e^x$ og $g(x) = x^2$ er $2xe^{x^2} = g'(x)f(g(x))$. Setningen over sier da at
$$\int 2xe^{x^2}\,dx = F(u) + C|_{u=g(x)} = e^u + C|_{u=g(x)} = e^{x^2} + C$$
som en lett kontrollerer er riktig ved derivasjon. ■

I praksis er dette en litt tungvinnt måte å anvende substitusjonsteknikken på og vi skal hellere beskrive en mer intuitiv tilgang til teknikken. Denne baserer seg på å betrakte en den deriverte $\frac{du}{dx}$ av en funksjon u som en *brøk*.

Anta vi skal finne
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx.$$
Vi oppdager at både g og dens deriverte g' oppterer i integranden og teknikken går da ut på å sette $u = g(x)$. Deriverer vi u med hensyn på x får vi
$$\frac{du}{dx} = g'(x)$$
og dermed, hvis vi ser på $\frac{du}{dx}$ some en brøk,
$$du = g'(x)dx.$$
Vi kan nu intuitivt omskrive vårt opprinnelige integral som følger:
$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du|_{u=g(x)} = F(u) + C|_{u=g(x)} = F(g(x)) + C$$
Selvom noen skritt her er på litt gyngende grunn rent logisk er dette måten en anvender substitusjon i praksis. Det viktigste for oss er at det fungerer! Vi illusterer metoden på vårt tidligere eksempel og et par stykker til.

Eksempel 1.5.3 Finn
$$\int 2xe^{x^2}\,dx$$
Vi observerer at både x^2 og dens deriverte $2x$ oppterer i uttrykket og setter $u = x^2$. Da er
$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$
Substituerer vi dette inn i vårt opprinnelige ubestemte integral får vi:
$$int\,\underbrace{e^{x^2}}_{e^u}\,\underbrace{2x\,dx}_{du} = \int e^u\,du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

som heldigvis stemmer overens med vårt tidligere fundne svar. ■

Eksempel 1.5.4 Finn

$$\int 2x\sqrt{x^2-4}\,dx.$$

Siden $\frac{d}{dx}(x^2-4)=2x$ setter vi $u=x^2-4$. Dermed er:

$$\frac{du}{dx}=2x \Rightarrow du=2x\,dx$$

Vi innsetter dette i vårt opprinnelige integral og finner:

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2-4}}_{\sqrt{u}}\underbrace{2x\,dx}_{du}=\int \sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}+C$$

■

Eksempel 1.5.5 Finn

$$\int \frac{\ln\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\,dx$$

Vi skriver først dette om til:

$$2\int \ln\sqrt{x+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx$$

Siden $\frac{d}{dx}(\sqrt{x+2})=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ setter vi $u=\sqrt{x+2}$ og får:

$$du=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx$$

Substituerer vi dette inn i vårt opprinnelige integral finner vi:

$$\int \frac{\ln\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\,dx=2\int \underbrace{\ln\sqrt{x+2}}_{\ln u}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx}_{du}=2\int \ln u\,du$$

Vi har nå redusert problemet til å finne en antiderivert til $\ln u$. Selvom dette ser tilforlatelig ut krever det et lite triks og en delvis integrasjon:

$$\int \ln u\,du=\int 1\cdot\ln u\,du=u\ln u-\int\frac{1}{u}u\,du=u\ln u-u+C$$

Og substituerer vi tilbake igjen med $u = \sqrt{x+2}$ ender vi opp med:

$$\int \frac{\ln\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}}\,dx = 2\sqrt{x+2}\ln\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + C$$

■

Som det fremgår av det siste eksemplet er integrasjon generellt vesentlig vanskeligere enn derivasjon, og en er ofte avhengig av å være litt "lur". Ved å regne mange oppgaver vil en oppbygge seg en intuisjon for hvornår de enkelte av våre teknikker skal anvendes, hva som vil være en lur substitusjon, hva som skal være f h.h.v. g i delvis integrasjon o.s.v.

Oppgaver:

Oppgave 1.5.6. *Kontroller svaret i alle eksempler i denne seksjonen.*

Oppgave 1.5.7. *Finn følgende antideriverte ved substitusjon.*

$$i)\ \int \frac{1}{x+2}\,dx \quad ii)\ \int e^{-x}\,dx \quad iii)\ \int \sqrt[3]{2x}\,dx \quad iv)\ \int \sqrt{2x-5}\,dx$$

Oppgave 1.5.8. *Finn*

$$i)\ \int \frac{\ln x}{x}\,dx \quad ii)\ \int 3x^2(x^3-7)^{2009}\,dx \quad iii)\ \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad iv)\ \int \frac{x^2+x+1}{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-1}\,dx$$

Oppgave 1.5.9. *Finn*

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

Vink: Innse at $e^{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ *og sett* $u = \sqrt{x}$.

Oppgave 1.5.10. *Bevis setning 1.5.1.*

1.6 Partikulære løsninger av $y' = f(x)$

Så langt har vores interesse vært å løse problem av typen

$$y' = f(x)$$

og vi har studert en del teknikker for å finne løsningene som er gitt ved

$$y = F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Løsningene vi har funnet har vært av typen $y = F(x) + C$ der C angir et vilkårlig reelt tall. Med andre har vi funnet uendelig mange løsninger siden ulike verdier av C gir forskellige løsninger. Familien av alle funksjoner av typen $y = F(x) + C$ kalles den *generelle løsningen* av problemet $y' = f(x)$. Hver av løsningene i den generelle løsningen kalles en *partikulær løsning* og svarer således til een bestemt verdi av C.

Eksempel 1.6.1 Finn den generelle løsningen av $y' = -2xe^{-x^2}$.

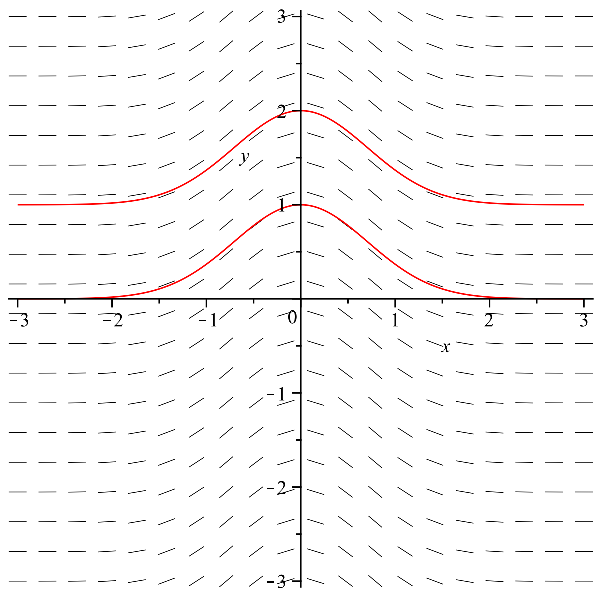
Den generelle løsningen er gitt ved:

$$y = \int -2xe^{-x^2}\,dx$$

som løses ved substitusjonen $u = -x^2$:

$$y = \int e^u\,du|_{u=-x^2} = e^u + C|_{u=-x^2} = e^{-x^2} + C$$

Nedenfor er tegnet tangentkartet for $y' = -2xe^{-x^2}$ samt grafen for løsningene svarende til $C = 0$ og $C = 1$:



Som vi ser av figuren svarer ulike verdier av C ikke overraskende til en vertikal forskyving løsningskurvene. ■

Anta nå at vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at løsningskurven skal passere gjennom et spesifisert punkt (x_0, y_0). En kan med rette spørre om vi igjen kan risikere å ende opp med en hel familie av løsninger som i det generelle tilfellet? Svaret på dette er nei. For å innse dette antar det motsatte - det vil si at det finns minst to forskellige løsninger $y = F_1(x)$ og $y = F_2(x)$ som løser $y' = f(x)$ og passerer gjennom (x_0, y_0). Dersom F_1 og F_2 virkelig er forskellige funksjoner kan ikke $h(x) = F_1(x) - F_2(x)$ være identisk 0 (Hvorfor?). Men $h'(x) = f(x) - f(x) = 0$ overalt så h er en konstant funksjon. Spesielt er $h(x) = h(x_0) = y_0 - y_0 = 0$ og vi ser at funksjonen h må være lik 0 overalt. Dermed kan ikke F_1 og F_2 være forskellige og vi har bevist at det bare finns een funksjon F som løser $y' = f(x)$ der grafen for $y = F(x)$ gjennomløper (x_0, y_0).

Essensen i det foregående er at når vi spør etter en løsning av $y' = f(x)$ som gjennomløper (x_0, y_0) da spør vi egentlig etter den entydige partikulære løsningen $y = F(x) + C$ hvis graf gjennomløper (x_0, y_0). Vi skal med andre bruke opplysningen $y(x_0) = y_0$ til å bestemme den verdi av C som gjør at grafen passerer gjennom (x_0, y_0).

Eksempel 1.6.2 Løs $y' = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ slik at $y(0) = 1$.

Den generelle løsningen er gitt ved

$$y = \int 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1\, dx = x^4 + x^3 + x^2 + x + C$$

For å finne den partikulære løsningen med $y(0) = 1$ setter vi inn denne betingelsen i uttrykket for den generelle løsningen:

$$1 = y(0) = 0^4 + 0^3 + 0^2 + 0 + C = C$$

Som gir oss $C = 1$ og dermed er den partikulære løsningen vi er ute etter

$$y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

■

Eksempel 1.6.3 Løs $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ slik at $y(0) = 2$.

Den generelle løsningen er gitt ved

$$y = F(x) = \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx$$

Denne løses ved substitusjonen $t = x^2 + 1$ som gir $dt = 2x\, dx$ og dermed:

$$y = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t + C = \ln(x^2 + 1) + C$$

Setter vi inn betingelsen $y(0) = 2$ får vi:

$$2 = y(0) = \ln(0^2 + 1) + C = \ln 1 + C = C$$

Dette gir $C = 2$ og dermed er løsningen git ved

$$y = \ln(x^2 + 1) + 2$$

■

Vi kaller også problemer av denne typen for *initialverdiproblemer*. Det vil si problemer der vi får gitt en diffrensialligning og verdien i et spesifisert punkt.

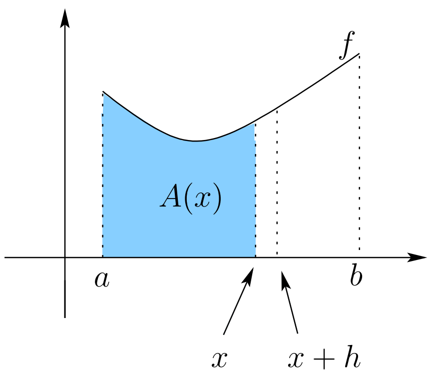
Oppgaver:

Oppgave 1.6.4. *Løs følgende initialverdiproblemer.*

1. $y' = 0$ *og* $y(5) = 6$.
2. $y' = x - 1$ *og* $y(-1) = 0$.
3. $y' = \frac{1}{x}$ *og* $y(e^2) = 0$.
4. $y' = x\sqrt{x^2+1}$ *og* $y(-3) = 1$.

Oppgave 1.6.5. ***("Bevis" for analysens fundamentalsetning) La f være en positiv kontinuerlig funksjon definert på intervallet $[a,b]$. Vi skal i denne oppgaven vise hvordan en beregner arealet $\mathcal{A}$ begrenset av grafen for f, x-aksen og de vertikale linjene $x = a$ og $x = b$. (tegn en figur)*

- *La $A(x)$ være arealet angitt på nedenstående figur:*



  Argumenter for at når h er liten er

$$\frac{A(x+h) - A(h)}{h} \approx f(x)$$

- *Argumenter for at $y = A(x)$ er en løsning av $y' = f(x)$.*
- *Hva er $A(a)$ lik?*
- *Vis at hvis $F(x)$ er en antiderivert til f da er $\mathcal{A} = F(b) - F(a)$*

  (Vink: Vi vet at både $F(x)$ og $A(x)$ er antideriverte til f. M.a.o. er

$$A(x) = F(x) + C$$

  for en aller annen konstant C. Bruk foregående punkt til å bestemme C.)
- *Bestem arealet begrenset av x-aksen og grafen for $y = 1 - x^2$.*

1.7 Separable differensialligninger

Vi har frem til nå bare sett på ligninger av typen $y' = f(x)$. Det vil si ligninger der den deriverte y' bare avhenger av x. Husker vi tilbake til avsnitt 1.1 definerte vi en 1. ordens differensialligning som en ligning av typen

$$y' = G(x, y)$$

der $G(x, y)$ angir et uttrykk som avhenger av både x og y. Generelt er denne typen differensial-ligning svært vanskelig å løse, men vi skal i dette avsnitt se på en forholdsvis stor klasse av disse som vi rent faktisk kan løse i mange tilfeller. Denne klassen kalles separable differensialligninger og er som navnet indikerer en klasse av ligninger der vi kan separere x og y på hver sin side av likhetstegnet.

Helt presist er en separabel differensialligning en ligning som har formen

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}$$

Der f og g er kontinuerlige funksjoner. Vi kan skrive denne ligningen om til:

$$g(y)y' = f(x)$$

Noterer vi oss at y' er variablen y derivert m.h.p. x ser vi ved bruk av kjerneregelen at

$$G(y) = F(x) + C$$

Dette er en implisitt ligning som angir relasjonen mellom x og y og dermed har vi essensielt løst vårt problem! Grafene for $G(y) = F(x) + C$ angir løsningskurvene for vår differensialligning $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$.

Ovenstående argumentasjon er kanskje ikke helt lett å følge men er den teoretiske årsaken til hvorfor teknikkene vi skal lære i denne seksjonen fungerer. Å løse separable differensialligninger er i praksis ofte ganske lett om en er villig til å gå på akkord med den dype forståelse av alle skritt. Dette minder veldig om substitusjonsteknikken vi har lært tidligere som på samme måte er lettere å bruke enn å forstå. Metoden for å løse separable differensialligninger illustreres best med noen eksempler. Også her er trikset å betrakte den deriverte som en brøk.

Eksempel 1.7.1 Vi ønsker å finne den løsningen av

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1$$

Vi betrakter $\frac{dy}{dx}$ som en vanlig brøk og omskriver:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$y\,dy = -x\,dx$$

Trikset er nå å integrere begge sider:

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$
$$x^2 + y^2 = C'$$

En sjekker lett at dette er den generelle løsningen av problemet $y' = -\frac{x}{y}$ skrevet på implisitt form. For å finne den verdi av C som sikrer at $y(0) = 1$ setter vi inn punktet $(0, 1)$ i utrykket for den generelle løsningen og finner C':

$$0^2 + 1^2 = C' \Rightarrow C' = 1$$

Hermed er den partikulære løsningen vi er ute etter $x^2 + y^2 = 1$. Vi bemerker dessuten at i dette eksemplet bestemmer konstanten C' ikke bare en vertikal forskyving av løsningskurvene men faktisk radius i sirklene som er løsningskurver i dette spesielle tilfelle. Generellt har C mye større betydning for utseendet til løsningene i det generelle tilfellet $y' = G(x, y)$ enn i det enkle tilfellet $y' = f(x)$.
■

Selvom et par skritt i fremgangsmåten over er en anelse tvilsomme kan de alle rettferdiggjøres, og fremgangsmåten har den store fordel at neste skritt hele tiden virker innlysende og naturlig. Vi tar et par eksempler til:

Eksempel 1.7.2 Finn den generelle løsningen av

$$\frac{dy}{dx} = -xy.$$

Igjen ser vi på $\frac{dy}{dx}$ som en brøk og isolerer alle x'er og alle y'er på hver sin side av likhetstegnet:

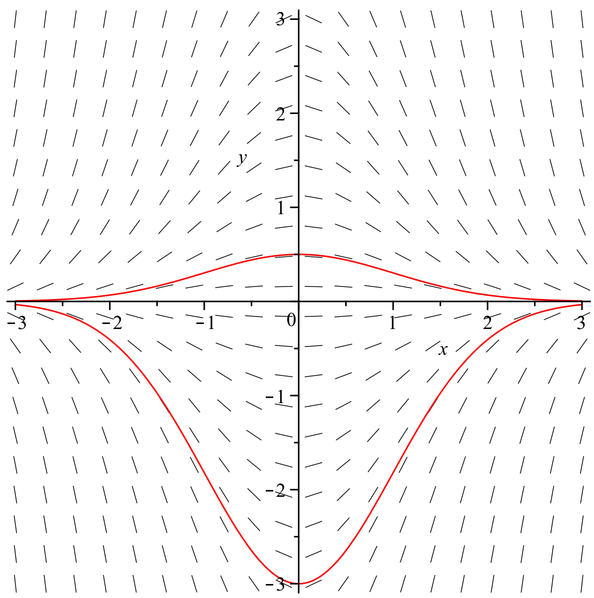
$$\frac{1}{y}\,dy = -xdx$$

Integrerer vi begge sider får vi:

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -x\,dx$$
$$\ln y = -\frac{1}{2}x^2 + C$$
$$y = C'e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Som er den generelle løsningen av $y' = -xy$

Tangentkartet for denne diffligningen ser slik ut:



Kurvene avtegnet er løsningene svarende til $C' = 1$ og $C' = -3$. Igjen ser vi av verdien av C er avgjørende for hvordan løsningskurven ser ut. ■

Det neste eksemplet viser virkelig hvor stor betydning verdien av integrasjonskonstanten C kan ha:

Eksempel 1.7.3 Finn generell løsning av

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 6x}{2y}$$

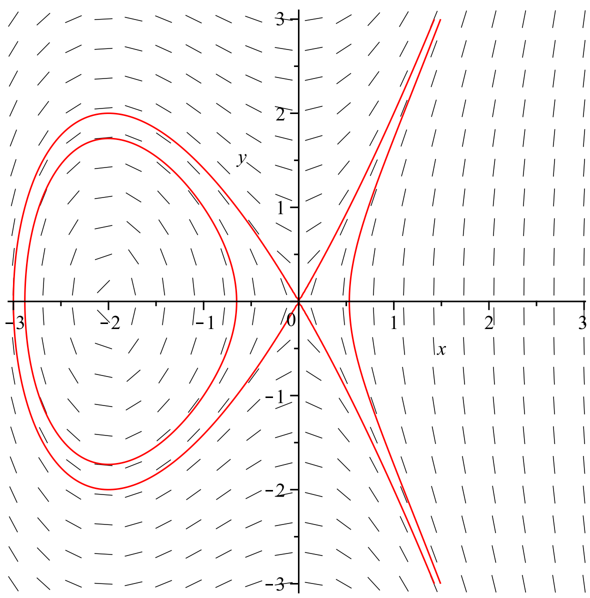
Igjen er dette en separabel differensialligning så vi separerer x og y som følger:

$$2y\, dy = (3x^2 + 6x)\, dx$$

Vi integrerer begge sider og får:

$$y^2 = x^3 + 3x^2 + C$$

som er den generelle løsningen av problemet skrevet på implisitt form. Tangentkartet og løsningskurver for et par ulike verdier av C ser slik ut:



Igjen ser vi at verdien av C har enorm betydning for utseendet til løsningskurvene. ■

Vi runder av seksjonen med ennda et eksempel på en separabel differensialligning

Eksempel 1.7.4 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y - 4y^3}, \quad y(1) = 0$$

Vi starter som vanlig med å separere x og y:

$$(2y - 4y^3)\, dy = 3x^2\, dx$$

Integrerer vi begge sider får vi:

$$y^2 - y^4 = x^3 + C$$

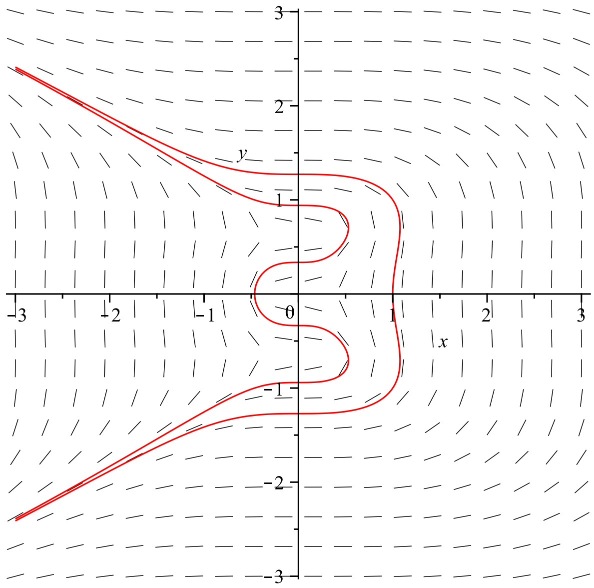
som er den generelle løsning. For å finne den partikulære løsningen med $y(1) = 0$ innsetter vi denne betingelsen i utrykket for den generelle løsningen og løser for C:

$$0^2 - 0^4 = 1^3 + C \Rightarrow C = -1$$

Så løsningen av initialproblemet vi begynnte med er:

$$y^2 - y^4 = x^3 - 1.$$

Løsningskurven er den av kurvene under som skjærer $(1, 0)$. Den andre er kurven for $C = \frac{1}{10}$.



■

Oppgaver:

Oppgave 1.7.5. *Løs følgende initialverdiproblemer ved å separere variable:*

1. $$y' = -ky, \quad y(0) = y_0$$

2. $$y' = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = 3$$

3. $$y' = 0, \quad y(10) = 5$$

4. $$y' = -(x^2+1)y^2, \quad y(1) = 1$$

Oppgave 1.7.6. *Ola tar en liter melk ut av kjøleskapet men glemmer å sette den inn igjen. Temperaturen i melken er $5°C$ når han tar den ut og rommet er $20°C$. Siden temperaturen i melken stiger proporsjonalt med differansen i temperatur mellom melken og rommet oppfyller temperaturen T som funksjon av t målt i timer følgende differensialligning*

$$\frac{dT}{dt} = k(20-T)$$

der k er en konstant.

- *Hvilken fortegn forventer du k har og hvorfor?*
- *Løs differensialligningen med en passende initialbetingelse.*
- *Bestem k dersom temperaturen er 10 grader etter 1 time.*

Oppgave 1.7.7. *Kari setter inn noen tusen kroner på en konto der renten, av størrelse r prosent pr år, tilskrives løpende. Innestående beløp kaller vi K og vokser som tiden går. Den deriverte av K er gitt ved:*

$$\frac{dK}{dt} = rK$$

Finn et uttrykk som avhenger bare av r som angir hvor lang tid det tar før Karis penger har fordoblet sin verdi.

Kapittel 2

Numeriske metoder

Vi skal i dette kapittelet se litt nærmere på løsning av både algebraiske og differensialligninger i de tilfeller hvor de metoder vi hittil har beskrevet ikke er adekvate eller ganske enkelt hvor problemet ikke lader seg løse eksakt. Egentlig er det litt feil å si vi skal *løse* denne typen problemer. Det vi hellere skal gjøre er på en måte det nestbeste - nemlig å finne veldig gode tilnærminger eller *approksimasjoner* til den eksakte løsning vi i mange tilfeller ikke greier å bestemme. Typiske eksempler kan være å finne tilnærminger til løsningen av ligningen

$$e^x = x^3$$

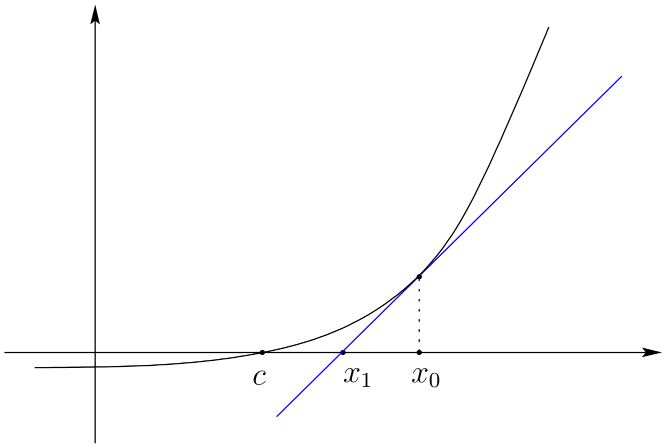
eller tilnærminger til løsningen av initialverdiproblemet

$$y' = e^{-x^2}, \quad y(0) = 1$$

I praktiske anvendelser vil det typisk være unntaket hellere enn regelen at vi greier å løse et problem eksakt. Utviklingen av datamaskiner de seneste 60 år har gjort det lettere å anvende slike approksimative metoder som ofte krever stor beregningskapasitet. Utviklingen av effektive algoritmer for ligningsløsning krever ofte god matematisk forståelse og gode pragrammeringsevner og er i dag big business. I dette kapittelet skal vi bare se på de aller enkleste slike metoder, men grunnprinsippene er forbausende lik mer avanserte.

2.1 Newtons metode

I denne seksjonen skal vi se på an av de virkelig klassiske numeriske metoder - Newtons metode. Metoden omhandler å finne nullpunkt til en deriverbar funksjon. Den baserer seg, som så å si alle de metoder vi skal se på, på det svært viktige faktum at en deriverbar funksjon nært ethvert punkt avviker svært lite fra en rett linje bare vi zoomer tilstrekkelig inn på grafen.



Figur 2.1: Newtons metode

Si vi på en eller annen måte klarer å bestemme at en deriverbar funksjon f må ha et nullpunkt nært et tall x_0. Ideen i Newtons metode er å erstatte grafen for f med *tangenten* i $x = x_0$ og så beregne *tangentens* skjæringspunkt med x-aksen, kall dette skjæringspunktet x_1. Dersom x_0 virkelig er tett på det egentlige nullpunktet, som vi kan kalle c, er det rimelig å anta at x_1 vil ligge enda tettere på c enn x_0 gjorde, se figur 2.1.

Tangenten for f i $x = x_0$ har stigningstall $f'(x_0)$ og rører grafen for f i $(x_0, f(x_0))$. Tangenten er derfor gitt ved ligningen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Punktet x_1 der denne tangenten skjærer x-aksen finner vi ved å sette $y = 0$ i ovenstående tangentligning og løse for x:

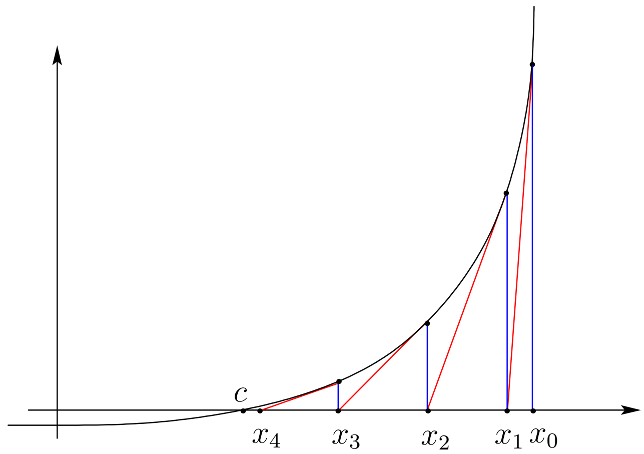
$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Vi finner med andre ord at x_1 som sannsynligvis er tettere på det egentlige nullpunkt c enn x_0 var er gitt ved:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ideen er nå å gjenta akkurat den samme procedure, men med udgangspunkt i x_1. Vi finner tangenten for f i x_1 og finner punktet x_2 der denne tangenten skjærer x-aksen. Vi finner at

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$



Figur 2.2: Newtons metode

Igjen er det rimelig å tro på at x_2 ligger tettere på c enn både x_0 og x_1. Det krever nå liten fantasi å regne ut at vi kan gjenta den samme proceduren med utgangspunkt i x_2 o.s.v.

Vi kan på denne måte regne oss frem til en sekvens $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ av bedre og bedre tilnærminger til c. Det eneste vi trenger er en kvalifisert 1. gjettning x_0 og så er sekvensen av x_n'er gitt ved

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Denne *algoritmen* eller procedure kalles Newtons metode etter dens oppfinner Isaac Newton (1643-1727). En grafisk illustrasjon av denne fremgangsmåten er vist på figur 2.2.

Setning 2.1.1 (Newtons Metode)**.** *La f være en deriverbar funksjon med et nullpunkt i $x = c$. Dersom vi velger et tall x_0 tilstrekkelig nært c og definerer*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

da vil $x_n \to c$ når $n \to \infty$.

En kan med rette lure på hva ”tilstrekkelig nært” skal bety og det er desværre vanskelig å angi noe entydig svar på dette spørsmålet. For vår bruk kan vi nøye oss med å notere at sjangsen for at metoden skal fungere blir bedre og bedre jo bedre vores første gjettning x_0 er. I praksis vil vi ofte bare gjøre et grovt overslag å så sjangse på at metoden vil fungere. Gjør den ikke det vil det uansett raskt fremgå av beregningene.

Eksempel 2.1.2 Vi kan teste metoden på et lett eksempel der vi egentlig ikke trenger metoden - nemlig for å finne nullpunktet til $f(x) = x^2 - 1$. Anta vi et øyeblikk ikke visste at $x = 1$ var et nullpunkt. Vi vil bruke Newtons metode med $x_0 = 2$, så vi beregner:

n	x_n	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	2	$x_0 - \frac{x_0^2-1}{2x_0}$	1.25
1	1.25	$x_1 - \frac{x_1^2-1}{2x_1}$	1.025
2	1.025	$x_2 - \frac{x_2^2-1}{2x_2}$	1.00030489
3	1.00030489	$x_3 - \frac{x_3^2-1}{2x_3}$	1, 000000046461
4	1, 000000046461	$x_4 - \frac{x_4^2-1}{2x_4}$	1, 00000000000000107932

Som forventet ser vi at $x_n \to 1$. ■

Eksempel 2.1.3 Et typisk eksempel på en ligning som ikke kan løses eksakt ved konvensjonelle metoder er

$$e^x = -x^3.$$

Et helt tilsvarende problem er selvsagt å finne nullpunkt til funksjonen

$$f(x) = e^x + x^3.$$

Hvis vi skisserer grafen for f vil vi raskt se at f har presis ett nullpunkt rundt $x = -\frac{1}{2}$ så vi setter $x_0 = -\frac{1}{2}$. Siden $f'(x) = e^x + 3x^2$ bliver Newtons formel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n^3}{e^{x_n} + 3x_n^2}.$$

Vi beregner:

n	x_n	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	-0.5	$x_0 - \frac{e^{x_0}+x_0^3}{e^{x_0}+3x_0^2}$	-0.854972191
1	-0.854972191	$x_1 - \frac{e^{x_1}+x_1^3}{e^{x_1}+3x_1^2}$	-0.778710528
2	-0.778710528	$x_2 - \frac{e^{x_2}+x_2^3}{e^{x_2}+3x_2^2}$	-0.772914269
3	-0.772914269	$x_3 - \frac{e^{x_3}+x_3^3}{e^{x_3}+3x_3^2}$	-0.772882960
4	-0.772882960	$x_4 - \frac{e^{x_4}+x_4^3}{e^{x_4}+3x_4^2}$	-0.772882959

Som viser at $x = -0.772882959$ er en løsning av $e^x + x^3 = 0$ ■

I begge de ovenstående eksempler ser vi at konvergensen er svært rask. En kan vise at antallet av korrekte desimaler fordobles for hvert skritt i Newtons metode når den deriverte i nullpunktet er forskellig fra 0. Dersom den deriverte er 0 i nullpunktet vil Newtons metode konvergere noe langsommere. Videre noterer vi oss at dersom en funksjon har mer enn ett nullpunkt vil Newtons metode selvsagt kunne approksimere forskellige nullpunkt alt etter hvilken startverdi vi velger oss. Dersom vi velger x_0 tilstrekkelig nært ett av nulpunktene vil Newtons metode approksimere netopp dette nullpunktet. Dette illustreres i oppgavene.

Vi slutter av med et par eksempler på hvad som typisk kan gå galt når vi bruker newtons metode uten å tenke først:

Eksempel 2.1.4 Funksjonen $g(t) = \frac{t}{1+t^2}$ har presis ett nullpunkt i $t = 0$. Anta vi ikke visste dette og ville bruke Newtons metode med $t_0 = 2$. Siden

$$g'(t) = \frac{1}{1+t^2} + t\frac{-1}{(1+t^2)^2}2t = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$$

finner vi at skrittene i Newtons metode er gitt ved:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{g(t_n)}{g'(t_n)} = t_n - \frac{t_n}{1+t_n^2} \cdot \frac{(1+t_n^2)^2}{1-t_n^2} = \frac{2t_n^3}{t_n^2-1}$$

n	t_n	$t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$	x_{n+1}
0	2	$\frac{2t_0^3}{t_0^2-1}$	5.33
1	5.33	$\frac{2t_1^3}{t_1^2-1}$	11.06
2	11.06	$\frac{2t_2^3}{t_2^2-1}$	22.29
3	22.29	$\frac{2t_3^3}{t_3^2-1}$	44.67
4	44.67	$\frac{2t_4^3}{t_4^2-1}$	89.40
5	89.40	$\frac{2t_5^3}{t_5^2-1}$	178.82

Som vi ser eksploderer bare t_n'ene og fordobles sirka i hvert skritt. Dette skyldes i dette tilfelle at startverdien $t_0 = 2$ ikke ligger tett nok nullpunktet som ligger i 0. Utfører vi Newtons metode på det samme eksemplet men med $t_0 = \frac{1}{2}$, som er et bedre estimat for nullpunktet enn 2, får vi:

n	t_n	$t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$	x_{n+1}
0	0.5	$\frac{2t_0^3}{t_0^2-1}$	-0.333333333
1	-0.333333333	$\frac{2t_1^3}{t_1^2-1}$	0.083333333
2	0.083333333	$\frac{2t_2^3}{t_2^2-1}$	-0.001165501
3	-0.001165501	$\frac{2t_3^3}{t_3^2-1}$	0.000000003
4	0.000000003	$\frac{2t_4^3}{t_4^2-1}$	-6.35×10^{-26}

■

Ovenstående eksempel viser at vi ikke bare kan starte Newtons metode et tilfeldig sted og så regne med at ting går bra. Riktignok er det slik i mange tilfeller men generelt er vi avhengig av en kvalifisert gjettning som startverdi. Det siste eksemplet i denne seksjonen viser at Newtons metode er helt avhengig av at funksjonen vi bruker Newtons metode på er deriverbar rundt nullpunktet vi prøver å finne.

Eksempel 2.1.5 Funksjonen

$$h(x) = \sqrt[3]{x} \quad x \in \mathbb{R}$$

har et nullpunkt i $x = 0$. Vi vil benytte Newtons metode med $x_0 = \epsilon > 0$ til å bestemme dette nullpunktet. Vi kan tenke på ϵ som et svært lite men positivt tall. Siden

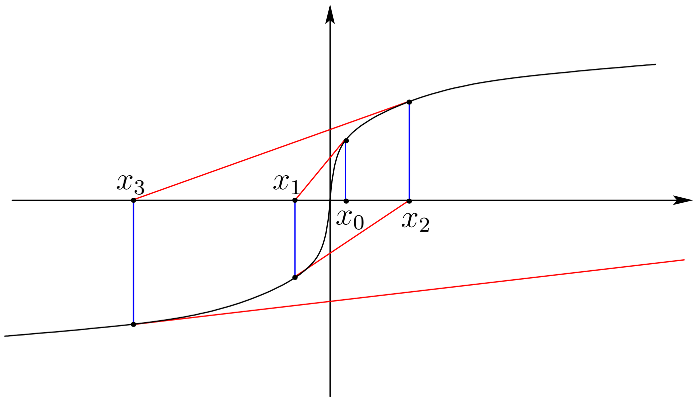
$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

er skrittene i Newtons metode gitt ved:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n = -2x_n.$$

Dette giver følgende tabell over de første skrittene i Newtons metode:

n	t_n	$t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$	x_{n+1}
0	ϵ	$-2x_0$	-2ϵ
1	-2ϵ	$-2x_1$	4ϵ
2	4ϵ	$-2x_2$	-8ϵ
3	-8ϵ	$-2x_3$	16ϵ
4	16ϵ	$-2x_4$	-32ϵ



Figur 2.3: Newtons metode på $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Det er ikke vanskelig å bli overbevist om at etter n skritt er $|x_n| = 2^n\epsilon$ og uansett hvor liten vi måtte velge $\epsilon > 0$ vil $|x_n| \to \infty$. Med andre ord fungerer ikke Newtons metode uansett hvor bra vår første gjettning er. Det som går galt er at $h(x) = \sqrt[3]{x}$ ikke er deriverbar i 0;

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(0+h)-h(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \infty$$

Hvis vi husker litt tilbake var deriverbarhet i og nær nullpunktet jo en premiss i Newtons metode så eksemplet er *ikke* i motstrid med teorien. ■

Oppgaver

Oppgave 2.1.6. *Utfør Newtons metode på de angitte funksjoner med angitt(e) startpunkt(er).*

1. $f(x) = 3x^3 - 3x - 1$ *og*
   - (a) $x_0 = -1$
   - (b) $x_0 = 0$
   - (c) $x_0 = 1$
2. $f(x) = 4 - x^2$ *og*
   - (a) $x_0 = -0.1$
   - (b) $x_0 = 0$
   - (c) $x_0 = 0.1$

3. $f(x) = \sqrt{x} + 2 - e^x$ *og* $x_0 = 1$.

4. $f(x) = \ln x + e^x$ *og* $x_0 = \frac{1}{2}$.

Oppgave 2.1.7. *Løs følgende ligninger:*

1. $\ln x = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2. $\ln x = 1 - x^2$

3. $e^{-x^2} = x$

Oppgave 2.1.8 (*)**.** *La*

$$P(v) = \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{1}{v}, \quad v > 0$$

1. *Vis at ligningen* $e^v - e^{-v} - 2v^{-2} = 0$ *bare har en løsning som må være et minimumspunkt for* P.

2. *Finn dette minimumspunktet ved hjelp av Newtons metode.*

Oppgave 2.1.9 (*)**.** *La* $\alpha > 0$ *og definer*

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \geq 0 \\ (-x)^\alpha & x < 0 \end{cases}$$

1. *Tegn grafene for* f_α *når* $\alpha = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

2. *Alle* f_α *har presis ett nullpunkt i* $x = 0$. *For hvilke* f_α *fungerer Newtons metode?*

Oppgave 2.1.10 (*)**.** *En stige på 10m står opp av en vegg. Ved foten av veggen står en kasse på* $1m \times 1m \times 1m$. *Stigen rører akkurat hjørnet på kassen når den hviler opp av veggen.*

1. *Vis at høyden stigen når opp i er gitt ved løsningene til ligningen*

$$h^4 - 2h^3 - 98h^2 + 200h - 100 = 0$$

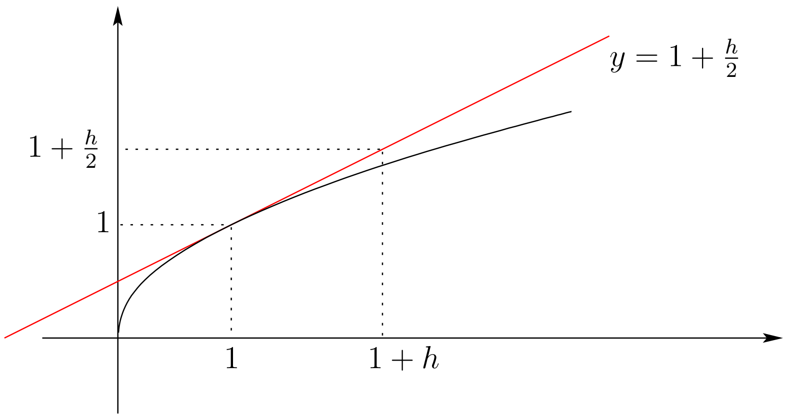
2. *Problemet har to løsninger i intervallet* $1 < h < 10$. *Finn begge disse løsningene ved hjelp av Newtons metode.*

2.2 Eulers metode

Eulers metode omhandler løsning av initialverdiproblemer. Eller rettere: Eulers metode produserer approksimasjoner til den eksakte løsningen av et gitt initialverdiproblem. Før vi ser nærmere på hva Eulers metode består i ser vi først på et eksempel som illustrerer den grunnleggende ide i Eulers metode. Eksemplet illustrerer hvor bra tangenter til deriverbare funksjoner approksimerer funksjonen lokalt.

Eksempel 2.2.1 La $f(x) = \sqrt{x}$. Da er $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og i punktet $(1,1)$ har tangenten til f dermed stigningstall lik $\frac{1}{2}$.

Vi ønsker å vurdere hvor bra tangenten $y = 1 + \frac{h}{2}$ approksimerer f når vi beveger oss et skritt av lengde h til høyre. Vi forventer at både feilen ϵ og den relative feilen ϵ_{rel} blir liten når h er liten, se figur 2.4. Rent grafisk betyr dette nemlig at tangenten og grafen ligger svært nær hverandre i $x = 1 + h$ når h er liten.



Figur 2.4: $f(x) = \sqrt{x}$

Ved hjelp av kalkulator finner vi følgende tabell:

h	$\sqrt{1+h}$	$1 + \frac{h}{2}$	ϵ	ϵ_{rel}
3	2	2.5	0.5	25%
2	1.7321	2	0.2679	15.5%
1	1.4142	1.5	0.0858	6.07%
0.5	1.2247	1.25	0.0253	1.79%
0.25	1.1180	1.125	0.0070	0.62%
0.1	1.0488	1.05	0.0012	0.11%
0.01	1.0049	1.0050	0.000012	0.0012%

Som vi ser av tabellen over blir feilen vi gjør ved å approksimere f med tangenten i $(1,1)$ mindre og mindre jo mindre h er eller tilsvarende jo nærmere $1 + h$ er på 1. Det essensielle er at for tilstrekkelig små tilvekster h er tangenten og grafen nærmest sammenfallende. ■

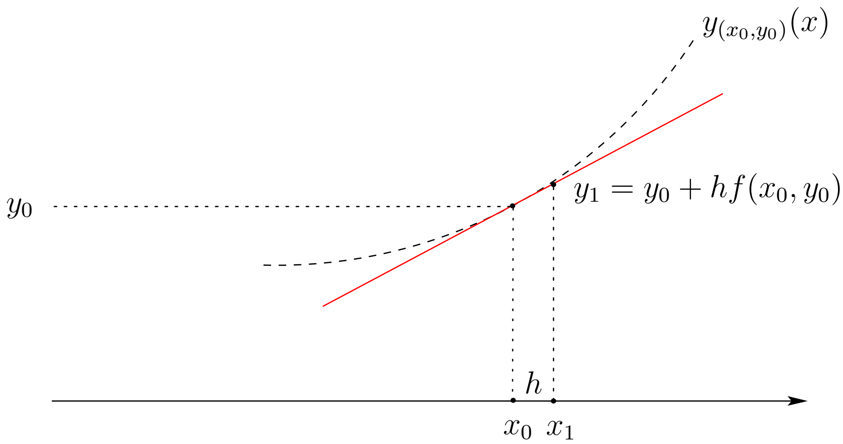
Konklusjonen i ovenstående eksempel kan gi oss ideen til det vi skal kalle et *Eulerskritt*. Anta vi har gitt et initialverdiproblem

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

som vi ikke greier å løse ved konvensjonelle metoder. Fra generell teori vet vi at, uavhengig om vi ikke greier å løse problemet eller ikke, så vil det under passende betingelser på f rent faktisk eksistere presis een løsning $y_{(x_0,y_0)}(x)$ for enhver initialverdi (x_0, y_0). Ideeen i det vi skal kalle et Eulerskritt av lengde h er at vi kan tilnærme verdien av $y_{(x_0,y_0)}$ i $x_1 = x_0 + h$ ved å følge *tangenten* i (x_0, y_0) i stedet for *grafen* for $y_{(x_0,y_0)}$. På denne måten approksimerer vi $y_{(x_0,y_0)}(x_1)$ ved

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

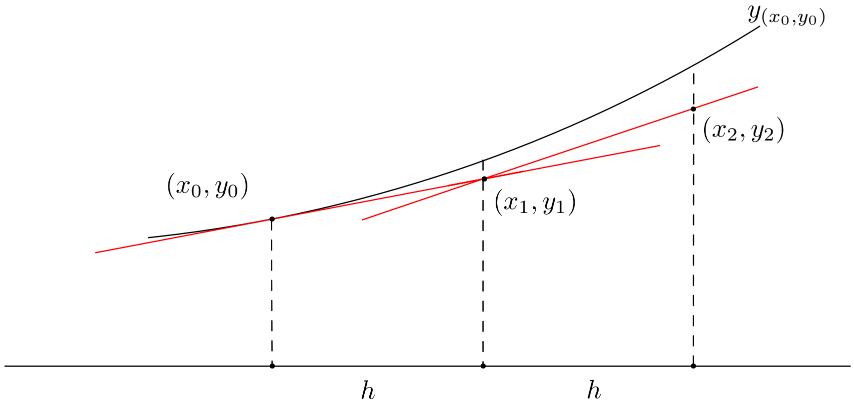
se figur 2.5.



Figur 2.5: $y = y_0 + hf(x_0, y_0)$ tilnærmer den kjennte løsningen $y_{(x_0,y_0)}$ godt når h er liten. Denne måte å tilnærme $y_{(x_0,y_0)}$ i $x = x_0 + h$ kalles et *Eulerskritt* av lengde h.

Ideen videre er nå å bruke *resultatet* av Eulerskrittet, det vil si punktet(x_1, y_1), som utgangspunkt for et nytt Eulerskritt av lengde h. Vi følger den tangenten i tangentkartet for differensialligningen vår som utgår fra (x_1, y_1) og følger den ett skritt av lengde h mot høyre frem til punktet (x_2, y_2) der $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$, se figur 2.6.

På denne måte kan vi bli ved å ta nye skritt av lengde h der vi hele tiden starter i det sist funne punktet (x_k, y_k), og følger tangenten definert av differensialligningen i (x_k, y_k) ett skritt av lengde h frem til neste approksimasjon



Figur 2.6: Fra (x_1, y_1) følger vi tangenten definert av differensialligningen i (x_1, y_1) frem til (x_2, y_2). Dersom f er en tilstrekkelig pen funksjon og h liten nok vil (x_2, y_2) approksimere $y_{(x_0,y_0)}$ bra i $x = x_2$.

(x_{k+1}, y_{k+1}). På denne måten finner vi en serie av punkter der neste punkt hele tiden beregnes ved å følge retningensom tangentkartet for differensialligningen forteller oss i det foregående punkt. Tegner vi en kurve gjennom disse punktene virker det intuitivt innlysende at denne kurven vil følge tangentkartet ganske bra, og at den derfor vil tilnærme den løsningen som skjærer vårt initialpunkt. I allefall om vi beregner disse punktene til å ligge tett eller tilsvarende ved å velge h liten. Denne intuisjonen er ikke feil -i allefall ikke når funksjonen f er tilstrekkelig pen - som den vil være i *alle* eksempler i MA0003.

Vi summerer opp i følgende definisjon.

Definisjon 2.2.2 (Eulers metode)**.** *Gitt initialverdiproblemet*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \geq x_0$$

Vi definerer Eulers metode på dette problemet med skrittlengde $h > 0$ *som en serie suksessive tilnærminger* $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *til den eksakte løsningen av ovenstående problem i punktene* $x = x_1, x_2, x_3 \ldots$ *der* $x_k = x_0 + kh$*. M.a.o. er* x_k *presis* k *skritt av lengde* h *fra initialpunktet* x_0*. Approksimasjonene* $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *er gitt ved*

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

Første y*-verdi er gitt ved initialbetingelsen* $y(x_0) = y_0$*.*

Vi illustrerer metoden på et enkelt eksempel som vi egentlig kan løse eksakt. Dette vil tillate oss å måle hvor presis Eulers metode er.

Eksempel 2.2.3 Vi vil løse initialverdiproblemet $y' = y$ med $y(0) = 1$ på intervallet $[0, 1]$. Ligningen er separabel og en finner lett at $y = e^x$ er eksakt løsning. Vi skal i stedet illustrere Eulers metode med noen forskellige skrittlengder.

$h = 1$

k	x_k	y_k	$y_k + hf(x_k, y_k)$	y_{k+1}
0	0	1	$(1+1)1$	2
1	1	2		

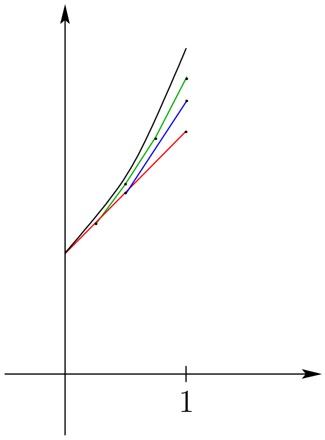
$h = 0.5$

k	x_k	y_k	$y_k + hy_k$	y_{k+1}
0	0	1	$(1+0.5)1$	1.5
1	0.5	1.5	$(1+0.5)1.5$	2.25
2	1	2.25		

$h = 0.25$

k	x_k	y_k	$y_k + hy_k$	y_{k+1}
0	0	1	$(1+0.25)1$	1.25
1	0.25	1.25	$(1+0.25)1.25$	1.5625
2	0.50	1.5625	$(1+0.25)1.5625$	1.9531
3	0.75	1.9531	$(1+0.25)1.9531$	2.4414
4	1	2.4414		

Sammenligner vi med den eksakte y-verdi i $x = 1$ som er $y = e = 2.71828$ ser vi som forventet at presisjonen i Eulers metode øker når skrittlengden h minker, se figur 2.7.



Figur 2.7: Grafene viser de ulike resulteter av Eulers metode når h varierer. Punktene vi har funnet er forbundet med rette linjer. Rød er for $h = 1$, blå er for $h = 0.5$ og grønn er for $h = 0.25$. Den svarte kurven angir den eksakte løsningen $y = e^x$.

■

Oppgaver

Oppgave 2.2.4. *Ta ett skritt med Eulers metode i følgende initialverdiproblemer:*

1. $y' = \frac{1}{y}$ *med initialverdi* $y(0) = \frac{1}{2}$ *og* $h = 1$.
2. $y' = -xy$ *med initialverdi* $y(3) = \frac{1}{2}$ *og* $h = 0.5$.
3. $y' = x(4 - y^2)$ *med initialverdi* $y(0) = 0$ *og* $h = 0.1$

Oppgave 2.2.5. *Ta tre skritt med Eulers metode i følgende initialverdiproblemer og sammenlign verdien* y_3 *med den eksakte løsning i hvert tilfelle. (Alle ligningene er separable.)*

1. $y' = \frac{1}{y}$ *med initialverdi* $y(0) = \frac{1}{2}$ *og* $h = 1$.
2. $y' = -xy$ *med initialverdi* $y(3) = \frac{1}{2}$ *og* $h = 0.5$.
3. $y' = x(4 - y^2)$ *med initialverdi* $y(0) = 0$ *og* $h = 0.1$

Vink: Den siste er vanskelig å løse eksakt. De som vil ha en nøtt kan jo prøve å vise at løsningen er gitt ved $y = 2 - \frac{4}{e^{2x^2}+1}$. *I den forbindelse kan følgende være nyttig:* $\frac{1}{4-y^2} = \frac{1}{4}\frac{(2+y)+(2-y)}{(2+y)(2-y)}$.

Oppgave 2.2.6 (**). *Initialverdiproblemet $y' = y$ med $y(0) = 1$ har den eksakte løsningen $y = e^x$. Vis ved å ta n skritt av lengde $\frac{1}{n}$ med Eulers metode at*

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

Vis videre ved å justere ovenstående argument litt at

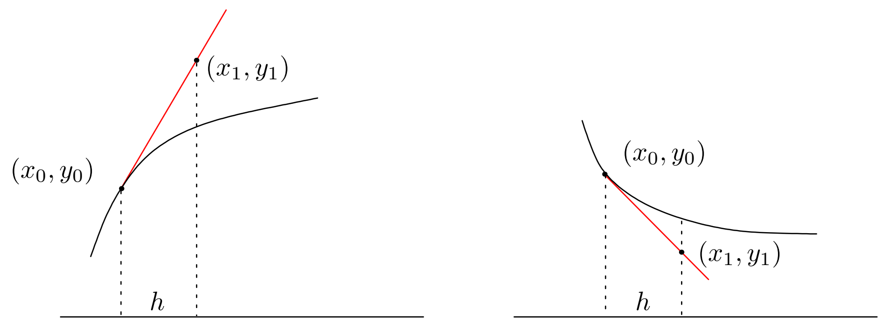
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x, \quad x > 0$$

2.3 Modifisert Euler

I dette kapittelet er det underliggende problem fremdeles initialverdiproblemet

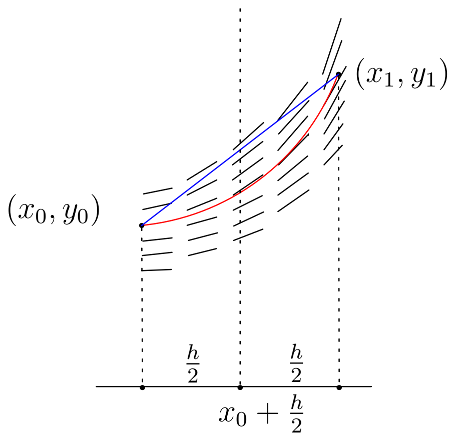
$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

som vi antar er løsbart, *men* vi greier ikke å bestemme løsningen ved eksakte metoder. Ideen bak det vi skal kalle *modifisert Euler* forklares egentlig best med å illustrere hva det er som gjør at Eulers metode til tider er ganske upresis. Som figur 2.8 viser vil vi som oftest når vi tar et langt Eulerskritt skyte betraktelig over eller under den eksakte verdi vi er ute etter å approksimere. For å unngå dette kompenserer en i Eulers metode med å gjøre skrittlengden h veldig liten. Dette er desværre noe uheldig da små skrittlengder gir forferdelig mange skritt og dermed mange utregninger.



Figur 2.8: Ved lange skritt med vanlig Euler bommer vi ofte ganske grovt på de eksakte verdiene vi er ute etter.

For å omgå dette ønsker vi å følge en bedre linje enn tangenten i (x_0, y_0) når vi skal regne ut y_1. Ideelt sett skulle vi følge den rette linjen som skjærer den eksakte løsningen i $y_{(x_0,y_0)}(x_1)$. Da ville tilnærmingen være perfekt. Dette er selvsagt ikke mulig da den eksakte løsningen $y_{(x_0,y_0)}$ er ukjent. I stedet observerer vi at denne ideelle linjen i mange tilfeller vil være tilnærmet parallel med tangentene i tangentkartet definert av differensialligningen vår midtveis



Figur 2.9: Figuren viser et lite utsnitt av et tangentkart og en løsning $y_{(x_0,y_0)}$. Den blå sekanten er ideallinjen vi ønsker å følge når vi skal aproksimere $y_{(x_0,y_0)}(x_1)$. Vi observerer at tangentene i tangentkartet midtveis mellom (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er tilnærmet parallelle med denne sekanten.

mellom (x_0, y_0) og (x_1, y_1), se figur 2.9.

Poenget med modifisert Euler er at vi *kan* bestemme en god tilnærming til dette ønskete stigningstallet midtveis mellom (x_0, y_0) og (x_1, y_1). Ved å ta et *halvt* skritt med vanlig Euler finner vi et et punkt $(x_0 + \frac{h}{2}, p)$ tilnærmet midtveis mellom (x_0, y_0) og (x_1, y_1). Evaluerer vi f i dette punktet;

$$f(x_0 + \frac{h}{2}, p)$$

og bruker det funne tallet som stigningstall for et Eulerskritt av lengde h startende i (x_0, y_0) vil vi generelt få et mye bedre estimat y_1 enn med vanlig Euler, se figur 2.10.

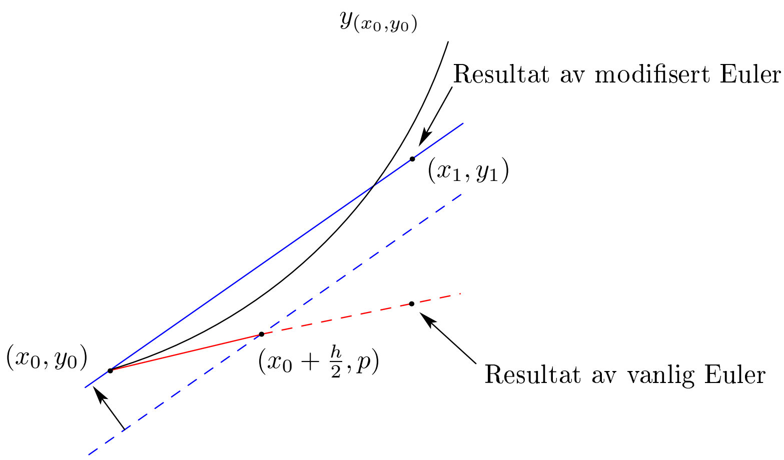
Eksempel 2.3.1 Vi vil utføre ett skritt av lengde $h = 1$ med modifisert Euler på initialverdiproblemet

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Vi tar først ett skritt av lengde $\frac{h}{2} = 0.5$ med vanlig Euler;

$$p = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 1 + 0.5 \cdot 1 = 1.5$$

Med andre ord gir dette ”halve” skrittet oss punktet $(0.5, 1.5)$. Diffligningen definerer i dette punktet en tangent med stigningstall lik y-verdien - altså 1.5.



Figur 2.10: I modifisert Euler tar vi først et skritt med vanlig Euler av lengde $\frac{h}{2}$. Resultatet $(x_0 + \frac{h}{2}, p)$ brukes til å finne stigningstallet for den stiplete blå linjen. Heretter tar vi et skritt av lengde h langs den heltrukne blå linjen som har dette stigningstallet men utgår fra (x_0, y_0). Forskellen i presisjon mellom denne metode og vanlig Euler som angitt er slående.

Vi tar derfor et skritt av lengde 1 fra initialpunktet $(0, 1)$ med stigningstall 1.5;

$$y_1 = y_0 + hf(x_0 + \frac{h}{2}, p) = 1 + 1 \cdot 1.5 = 2.5$$

Vi bemerker at dette ene skrittet gir en bedre approksimasjon til den eksakte løsningen $y = e^x$ enn vi oppnådde med fire vanlige Eulerskritt av lengde 0.25 i eksempel 2.2 ■

Eksempel 2.3.2 Vi vil utføre fire skritt av lengde $h = 0.25$ med modifisert Euler på samme initialverdiproblem som i foregående eksempel, nemlig $y' = y, \quad y(0) = 1$. Vi fører utregningene opp i en tabell som forhåpentlig er selvforklarende.

k	x_k	y_k	$y_k + \frac{h}{2}y_k$	p	$y_k + hp$	y_{k+1}
0	0	1	$y_0 + \frac{h}{2}y_0$	1.125	$y_0 + hp$	1.2813
1	0.25	1.2813	$y_1 + \frac{h}{2}y_1$	1.4414	$y_1 + hp$	1.6416
2	0.50	1.6416	$y_2 + \frac{h}{2}y_2$	1.8468	$y_2 + hp$	2.1033
3	0.75	2.1033	$y_3 + \frac{h}{2}y_3$	2.3662	$y_3 + hp$	2.6949
4	1.00	2.6949				

Vi bemerker at $y_4 = 2.6949$ tilnærmer den eksakte verdien $e = 2.71282\ldots$ ganske godt til tross for relativt lang skrittlengde. Sammenligner vi med eksempel 2.2 bemerker vi spesielt at feilen i vanlig Euler er 1500% større enn med modifisert Euler når vi benytter samme skrittlengde i de to metoder. Prisen er selvfølgelig at modifisert Euler krever omtrent dobbelt så mye utregninger, men selvom vi tar dette i betragtning er modifisert Euler klart overlegen. ■

Oppgave 2.3.3. *Hvorfor er modifisert Euler like enkel å utføre som vanlig Euler i det tilfellet der y' bare avhenger av x? Det vil si:*

$$y' = f(x)$$

I dette tilfellet er modifisert Euler også kjennt som midtpunkt-metoden.

Oppgave 2.3.4. *Ta ett skritt av lengde $h = 1$ med modifisert Euler i følgende initialverdiproblemer. Oppgaven lettes forresten betraktelig hvis du svarer på oppgave 2.3.3 først.*

1. $y' = \frac{x^2+\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$ *med* $y(0) = 0$.
2. $y' = 2x$ *med* $y(0) = 0$

Oppgave 2.3.5. *Ta ett skritt av lengde $h = 1$ med modifisert Euler i følgende initialverdiproblemer.*

1. $y' = -xy$ *med* $y(0) = 1$.
2. $y' = x^2 - y^2$ *med* $y(0) = 1$.

Oppgave 2.3.6. *Ta enda et skritt med modifisert Euler i initialverdiproblemene i foregående oppgave. Samme skrittlengde: $h = 1$.*

Oppgave 2.3.7 (**). *I denne oppgave indikerer vi hvor mye bedre modifisert Euler er relativt til vanlig Euler.*

1. *Vis at*
$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2})^n = e$$
Vink: Oppgave 2.2.6.

2. *Hvor stor skal n være før denne formelen gir $e \approx 2.71$ når vi runder av til to desimaler? Den tilsvarende n i formelen i oppgave 2.2.6 skal være 102 for å oppnå denne presisjon!*

   Vink: Her må du bare prøve deg frem.