MA0003 - 8. forelesning

Implisitt derivasjon og Differensialligninger

Steffen Junge

NTNU
Det skapende universitet

31. august 2009

Outline

Outline

Outline

- En implisitt ligning i to variable er en ligning av to variable der den en variablen ikke kan utrykkes ved den andre.
- Ett eksempel er $y^2 + x^2 = 1$ som beskriver en sirkel.
- Implisitte ligninger beskriver presis som eksplisitte ligninger kurver i planet.
- Kan vi derivere eksplisitte ligninger og finne stigningstall til tangenter for disse kurvene?
- Ja!

- En implisitt ligning i to variable er en ligning av to variable der den en variablen ikke kan utrykkes ved den andre.
- Ett eksempel er $y^2 + x^2 = 1$ som beskriver en sirkel.
- Implisitte ligninger beskriver presis som eksplisitte ligninger kurver i planet.
- Kan vi derivere eksplisitte ligninger og finne stigningstall til tangenter for disse kurvene?
- Ja!

- En implisitt ligning i to variable er en ligning av to variable der den en variablen ikke kan utrykkes ved den andre.
- Ett eksempel er $y^2 + x^2 = 1$ som beskriver en sirkel.
- Implisitte ligninger beskriver presis som eksplisitte ligninger kurver i planet.
- Kan vi derivere eksplisitte ligninger og finne stigningstall til tangenter for disse kurvene?
- Ja!

- En implisitt ligning i to variable er en ligning av to variable der den en variablen ikke kan utrykkes ved den andre.
- Ett eksempel er $y^2 + x^2 = 1$ som beskriver en sirkel.
- Implisitte ligninger beskriver presis som eksplisitte ligninger kurver i planet.
- Kan vi derivere eksplisitte ligninger og finne stigningstall til tangenter for disse kurvene?
- Ja!

- En implisitt ligning i to variable er en ligning av to variable der den en variablen ikke kan utrykkes ved den andre.
- Ett eksempel er $y^2 + x^2 = 1$ som beskriver en sirkel.
- Implisitte ligninger beskriver presis som eksplisitte ligninger kurver i planet.
- Kan vi derivere eksplisitte ligninger og finne stigningstall til tangenter for disse kurvene?
- Ja!

- En implisitt ligning i to variable er en ligning av to variable der den en variablen ikke kan utrykkes ved den andre.
- Ett eksempel er $y^2 + x^2 = 1$ som beskriver en sirkel.
- Implisitte ligninger beskriver presis som eksplisitte ligninger kurver i planet.
- Kan vi derivere eksplisitte ligninger og finne stigningstall til tangenter for disse kurvene?
- Ja!

Implisitt derivasjon

- Anta en implisitt ligning er gitt ved variablene x og y.
- Vi kan derivere ligningen m.h.p. x ved å derivere høyre og venstresiden hver for seg.
- I derivasjonen må vi huske på at variablen y avhenger av x.
- For dette trenger vi ofte kjerneregelen.

Implisitt derivasjon

- Anta en implisitt ligning er gitt ved variablene x og y.
- Vi kan derivere ligningen m.h.p. x ved å derivere høyre og venstresiden hver for seg.
- I derivasjonen må vi huske på at variablen y avhenger av x.
- For dette trenger vi ofte kjerneregelen.

Implisitt derivasjon

- Anta en implisitt ligning er gitt ved variablene x og y.
- Vi kan derivere ligningen m.h.p. x ved å derivere høyre og venstresiden hver for seg.
- I derivasjonen må vi huske på at variablen y avhenger av x.
- For dette trenger vi ofte kjerneregelen.

Implisitt derivasjon

- Anta en implisitt ligning er gitt ved variablene x og y.
- Vi kan derivere ligningen m.h.p. x ved å derivere høyre og venstresiden hver for seg.
- I derivasjonen må vi huske på at variablen y avhenger av x.
- For dette trenger vi ofte kjerneregelen.

Implisitt derivasjon

- Anta en implisitt ligning er gitt ved variablene x og y.
- Vi kan derivere ligningen m.h.p. x ved å derivere høyre og venstresiden hver for seg.
- I derivasjonen må vi huske på at variablen y avhenger av x.
- For dette trenger vi ofte kjerneregelen.

Implisitt derivasjon - eksempler

- Deriver $xy = 1$
- Deriver $x^2 + y^2 = 1$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Deriver $xy^3 - 4x^3 = 0$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Finn ligningen for tangenten gjennom punktet $(1, 3)$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 10$
- Finn horisontale og vertikale tangenter for $2x^2 + y^2 = 1$. Hva er maksimum og minimum av x og y?

Implisitt derivasjon - eksempler

- Deriver $xy = 1$
- Deriver $x^2 + y^2 = 1$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Deriver $xy^3 - 4x^3 = 0$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Finn ligningen for tangenten gjennom punktet $(1, 3)$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 10$
- Finn horisontale og vertikale tangenter for $2x^2 + y^2 = 1$. Hva er maksimum og minimum av x og y?

Implisitt derivasjon - eksempler

- Deriver $xy = 1$
- Deriver $x^2 + y^2 = 1$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Deriver $xy^3 - 4x^3 = 0$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Finn ligningen for tangenten gjennom punktet $(1, 3)$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 10$
- Finn horisontale og vertikale tangenter for $2x^2 + y^2 = 1$. Hva er maksimum og minimum av x og y?

Implisitt derivasjon - eksempler

- Deriver $xy = 1$
- Deriver $x^2 + y^2 = 1$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Deriver $xy^3 - 4x^3 = 0$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Finn ligningen for tangenten gjennom punktet $(1, 3)$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 10$
- Finn horisontale og vertikale tangenter for $2x^2 + y^2 = 1$. Hva er maksimum og minimum av x og y?

Implisitt derivasjon - eksempler

- Deriver $xy = 1$
- Deriver $x^2 + y^2 = 1$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Deriver $xy^3 - 4x^3 = 0$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Finn ligningen for tangenten gjennom punktet $(1, 3)$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 10$
- Finn horisontale og vertikale tangenter for $2x^2 + y^2 = 1$. Hva er maksimum og minimum av x og y?

Implisitt derivasjon - eksempler

- Deriver $xy = 1$
- Deriver $x^2 + y^2 = 1$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Deriver $xy^3 - 4x^3 = 0$ og finn et uttrykk for $\frac{dy}{dx}$
- Finn ligningen for tangenten gjennom punktet $(1, 3)$ på sirkelen $x^2 + y^2 = 10$
- Finn horisontale og vertikale tangenter for $2x^2 + y^2 = 1$. Hva er maksimum og minimum av x og y?

Outline

Outline

1. Implisitt derivasjon
2. Differensialligninger
   - Diff.ligninger og løsninger
   - Diff.ligninger av typen $y' = f(x)$

Differensialligning

- En 1.ordens differensialligning er en ligning der den den deriverte $y' = \frac{dy}{dx}$ er gitt eksplisitt ved variablene x og y.

$$y' = G(x, y)$$

- En *løsning* av differensialligningen er en ligning i x og y som tilfredsstiller differensialligningen når uttrykkene for x, y og y' innsettes.

Differensialligning

- En 1.ordens differensialligning er en ligning der den den deriverte $y' = \frac{dy}{dx}$ er gitt eksplisitt ved variablene x og y.

$$y' = G(x, y)$$

- En *løsning* av differensialligningen er en ligning i x og y som tilfredsstiller differensialligningen når uttrykkene for x, y og y' innsettes.

Differensialligning

- En 1.ordens differensialligning er en ligning der den den deriverte $y' = \frac{dy}{dx}$ er gitt eksplisitt ved variablene x og y.

$$y' = G(x, y)$$

- En *løsning* av differensialligningen er en ligning i x og y som tilfredsstiller differensialligningen når uttrykkene for x, y og y' innsettes.

Eksempler

- $y = x^2 + 7$ er en løsning av $y' = 2x$
- Er $y = \frac{e^x}{x}$ en løsning av $y + xy' = e^x$?
- Er $y^2 + x^2 = C$ en løsning av $y' = -\frac{x}{y}$?
- Det store spørsmålet er: Hvordan finne løsninger til en gitt differensialligning?

Eksempler

- $y = x^2 + 7$ er en løsning av $y' = 2x$
- Er $y = \frac{e^x}{x}$ en løsning av $y + xy' = e^x$?
- Er $y^2 + x^2 = C$ en løsning av $y' = -\frac{x}{y}$?
- Det store spørsmålet er: Hvordan finne løsninger til en gitt differensialligning?

Eksempler

- $y = x^2 + 7$ er en løsning av $y' = 2x$
- Er $y = \frac{e^x}{x}$ en løsning av $y + xy' = e^x$?
- Er $y^2 + x^2 = C$ en løsning av $y' = -\frac{x}{y}$?
- Det store spørsmålet er: Hvordan finne løsninger til en gitt differensialligning?

Eksempler

- $y = x^2 + 7$ er en løsning av $y' = 2x$
- Er $y = \frac{e^x}{x}$ en løsning av $y + xy' = e^x$?
- Er $y^2 + x^2 = C$ en løsning av $y' = -\frac{x}{y}$?
- Det store spørsmålet er: Hvordan finne løsninger til en gitt differensialligning?

Eksempler

- $y = x^2 + 7$ er en løsning av $y' = 2x$
- Er $y = \frac{e^x}{x}$ en løsning av $y + xy' = e^x$?
- Er $y^2 + x^2 = C$ en løsning av $y' = -\frac{x}{y}$?
- Det store spørsmålet er: Hvordan finne løsninger til en gitt differensialligning?

Grafisk illustrasjon av diffligninger

- Se på diffligningen $y' = -\frac{x}{y}$.
- Avsett i ethvert punkt (x, y) et lite linjesegment med stigningstall $-\frac{x}{y}$.
- Løsninger til vor diff.ligning er kurver som tangerer disse segmentene!
- D.v.s. konsentriske sirkler.

Grafisk illustrasjon av diffligninger

- Se på diffligningen $y' = -\frac{x}{y}$.
- Avsett i ethvert punkt (x, y) et lite linjesegment med stigningstall $-\frac{x}{y}$.
- Løsninger til vor diff.ligning er kurver som tangerer disse segmentene!
- D.v.s. konsentriske sirkler.

Grafisk illustrasjon av diffligninger

- Se på diffligningen $y' = -\frac{x}{y}$.
- Avsett i ethvert punkt (x, y) et lite linjesegment med stigningstall $-\frac{x}{y}$.
- Løsninger til vor diff.ligning er kurver som tangerer disse segmentene!
- D.v.s. konsentriske sirkler.

Grafisk illustrasjon av diffligninger

- Se på diffligningen $y' = -\frac{x}{y}$.
- Avsett i ethvert punkt (x, y) et lite linjesegment med stigningstall $-\frac{x}{y}$.
- Løsninger til vor diff.ligning er kurver som tangerer disse segmentene!
- D.v.s. konsentriske sirkler.

Grafisk illustrasjon av diffligninger

- Se på diffligningen $y' = -\frac{x}{y}$.
- Avsett i ethvert punkt (x, y) et lite linjesegment med stigningstall $-\frac{x}{y}$.
- Løsninger til vor diff.ligning er kurver som tangerer disse segmentene!
- D.v.s. konsentriske sirkler.

Outline

1. Implisitt derivasjon

2. Differensialligninger
   - Diff.ligninger og løsninger
   - Diff.ligninger av typen $y' = f(x)$

- Den enkleste form for differensialligninger er av formen $y' = f(x)$.
- D.v.s. y' avhenger *bare* av x.
- Det er enkelt å se at enhver funksjon $y = F(x)$ der $F'(x) = f(x)$ vil løse ligningen!
- Det dreier seg med andre ord om å finne en F slik at $F' = f$.
- Dette kalles *antiderivasjon* og vi skriver:

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

- Den enkleste form for differensialligninger er av formen $y' = f(x)$.
- D.v.s. y' avhenger *bare* av x.
- Det er enkelt å se at enhver funksjon $y = F(x)$ der $F'(x) = f(x)$ vil løse ligningen!
- Det dreier seg med andre ord om å finne en F slik at $F' = f$.
- Dette kalles *antiderivasjon* og vi skriver:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Den enkleste form for differensialligninger er av formen $y' = f(x)$.
- D.v.s. y' avhenger *bare* av x.
- Det er enkelt å se at enhver funksjon $y = F(x)$ der $F'(x) = f(x)$ vil løse ligningen!
- Det dreier seg med andre ord om å finne en F slik at $F' = f$.
- Dette kalles *antiderivasjon* og vi skriver:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Den enkleste form for differensialligninger er av formen $y' = f(x)$.
- D.v.s. y' avhenger *bare* av x.
- Det er enkelt å se at enhver funksjon $y = F(x)$ der $F'(x) = f(x)$ vil løse ligningen!
- Det dreier seg med andre ord om å finne en F slik at $F' = f$.
- Dette kalles *antiderivasjon* og vi skriver:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Den enkleste form for differensialligninger er av formen $y' = f(x)$.
- D.v.s. y' avhenger *bare* av x.
- Det er enkelt å se at enhver funksjon $y = F(x)$ der $F'(x) = f(x)$ vil løse ligningen!
- Det dreier seg med andre ord om å finne en F slik at $F' = f$.
- Dette kalles *antiderivasjon* og vi skriver:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

- Den enkleste form for differensialligninger er av formen $y' = f(x)$.
- D.v.s. y' avhenger *bare* av x.
- Det er enkelt å se at enhver funksjon $y = F(x)$ der $F'(x) = f(x)$ vil løse ligningen!
- Det dreier seg med andre ord om å finne en F slik at $F' = f$.
- Dette kalles *antiderivasjon* og vi skriver:

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Egenskaper til $\int f(x)\,dx$

- Den antideriverte er ikke entydig men avhenger av en additiv konstant!
- $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$
- Alle kontinuerlige $f(x)$ har antideriverte.
- Å finne antideriverte er mye vanskeligere enn å derivere - og ofte umulig.

Egenskaper til $\int f(x)\,dx$

- Den antideriverte er ikke entydig men avhenger av en additiv konstant!
- $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$
- Alle kontinuerlige $f(x)$ har antideriverte.
- Å finne antideriverte er mye vanskeligere enn å derivere - og ofte umulig.

Egenskaper til $\int f(x)\,dx$

- Den antideriverte er ikke entydig men avhenger av en additiv konstant!
- $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$
- Alle kontinuerlige $f(x)$ har antideriverte.
- Å finne antideriverte er mye vanskeligere enn å derivere - og ofte umulig.

Egenskaper til $\int f(x)\,dx$

- Den antideriverte er ikke entydig men avhenger av en additiv konstant!
- $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$
- Alle kontinuerlige $f(x)$ har antideriverte.
- Å finne antideriverte er mye vanskeligere enn å derivere - og ofte umulig.

Egenskaper til $\int f(x)\,dx$

- Den antideriverte er ikke entydig men avhenger av en additiv konstant!
- $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)$$
- Alle kontinuerlige $f(x)$ har antideriverte.
- Å finne antideriverte er mye vanskeligere enn å derivere - og ofte umulig.

Noen antideriverte

- $$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$$

- $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

- $$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Noen antideriverte

- $$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$$
- $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \quad x > 0$$
- $$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Noen antideriverte

- $$\int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$$
- $$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \quad x > 0$$
- $$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Noen antideriverte

- $$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1$$
- $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad x > 0$$
- $$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Hva sier konstanten C?

- Ta eksemplet $y' = x$ der løsningen er $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
- En løsning må i alle punkt (x, y) ha en tangent med stigningstall x.
- Avsett i alle (x, y) et lite linjestykke med dette stigningstallet.
- Enhver Løsningskurve har en slik tangent i ethvert punkt.
- Ved å velge C plukker vi ut en bestemt av disse.

Hva sier konstanten C?

- Ta eksemplet $y' = x$ der løsningen er $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
- En løsning må i alle punkt (x, y) ha en tangent med stigningstall x.
- Avsett i alle (x, y) et lite linjestykke med dette stigningstallet.
- Enhver Løsningskurve har en slik tangent i ethvert punkt.
- Ved å velge C plukker vi ut en bestemt av disse.

Hva sier konstanten C?

- Ta eksemplet $y' = x$ der løsningen er $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
- En løsning må i alle punkt (x, y) ha en tangent med stigningstall x.
- Avsett i alle (x, y) et lite linjestykke med dette stigningstallet.
- Enhver Løsningskurve har en slik tangent i ethvert punkt.
- Ved å velge C plukker vi ut en bestemt av disse.

Hva sier konstanten C?

- Ta eksemplet $y' = x$ der løsningen er $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
- En løsning må i alle punkt (x, y) ha en tangent med stigningstall x.
- Avsett i alle (x, y) et lite linjestykke med dette stigningstallet.
- Enhver Løsningskurve har en slik tangent i ethvert punkt.
- Ved å velge C plukker vi ut en bestemt av disse.

Hva sier konstanten C?

- Ta eksemplet $y' = x$ der løsningen er $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
- En løsning må i alle punkt (x, y) ha en tangent med stigningstall x.
- Avsett i alle (x, y) et lite linjestykke med dette stigningstallet.
- Enhver Løsningskurve har en slik tangent i ethvert punkt.
- Ved å velge C plukker vi ut en bestemt av disse.

Hva sier konstanten C?

- Ta eksemplet $y' = x$ der løsningen er $y = \frac{1}{2}x^2 + C$.
- En løsning må i alle punkt (x, y) ha en tangent med stigningstall x.
- Avsett i alle (x, y) et lite linjestykke med dette stigningstallet.
- Enhver Løsningskurve har en slik tangent i ethvert punkt.
- Ved å velge C plukker vi ut en bestemt av disse.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen

$$\int f(x)\,dx$$

kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen
$$\int f(x)\,dx$$
kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen
$$\int f(x)\,dx$$
kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen
$$\int f(x)\,dx$$
kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen
$$\int f(x)\,dx$$
kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen
$$\int f(x)\,dx$$
kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.

Initialverdiproblemer

- Løsningen av $y' = f(x)$ er som diskutert ikke entydig.
- Løsningen
$$\int f(x)\,dx$$
kalles den *generelle* løsningen og er en klasse av funksjoner der adskiller seg bare ved en konstant.
- Dersom vi i tillegg til $y' = f(x)$ krever at $y(c) = b$ for en eller annen c har vi det vi kaller et *initialverdiproblem*. Da er
  - Løsningen entydig.
  - Betingelsen $y(c) = b$ tillater oss å bestemme C i $\int f(x)\,dx$
- Eks: Løs initialverdiproblemet $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $y(4) = 3$.