Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Steffen Junge (73 59 17 73 / 94 16 27 27)

Eksamen i "Brukerkurs i Matematikk for Informatikere" - (MA0003)

Mandag 7. desember 2009
Tid: 15:00 – 19:00
Hjelpemidler: Ett gult ark stemplet institutt for matematiske fag, spesifisert kalkulator

LØSNING, KOMMENTAR & STATISTIKK

Oppgavesettet består av oppgavene 1-9. Oppgavene 1-7 skal alle besvares. Av oppgavene 8 og 9 skal bare én besvares. Du velger selv hvilken. Besvares begge regnes oppgave 8 som tellende. Husk å argumentere for alle svar.

Oppgave 1 Hva er tangentligningen for $f(x) = \ln x$ i punktet $(1, 0)$?

Løsning. Siden $f'(x) = \frac{1}{x}$ er stigningstallet til tangenten i $x = 1$ lik 1. Bruker vi ettpunktsformelen $y - y_0 = \alpha(x - x_0)$ får vi:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$$

som gir oss at tangenten er gitt ved $\underline{\underline{y = x - 1}}$ ■

Kommentar. Mange har denne rett og gjennomsnittscoren er 6.33 av 10. Vanligste feil er å bruke $\frac{1}{x}$ i stedet for $\frac{1}{x}|_{x=1} = 1$ som stigningstall. Dette gir svaret $y = 1 - \frac{1}{x}$ som ikke engang er en rett linje! ■

Oppgave 2 Løs initialverdiproblemet

$$y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y}, \quad y(1) = 1$$

Skriv svaret på implisitt form.

Løsning. Dette er et separabelt problem. Vi beregner:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2x}{3y^2 + 2y} \\ (3y^2 + 2y)\, dy &= 2x\, dx \\ \int 3y^2 + 2y\, dy &= \int 2x\, dx \\ y^3 + y^2 &= x^2 + C \end{aligned}$$

Innsetter vi initialbetingelsen $y(1) = 1$ i dette får vi:

$$1^3 + 1^2 = 1^2 + C \Rightarrow C = 1.$$

Med andre ord er $\underline{\underline{y^3 + y^2 = x^2 + 1}}$ løsningen av problemet. ■

Kommentar. Gjennomsnittsscore er 4.08 som er lavest i hele settet til tross for at dette absolutt ikke er en vanskelig oppgave. Virker som om mange får jernteppe bare de ser ordet initialverdiproblem og mange har bare hoppet over denne oppgaven. Vanligste feil hos de som har svart er å glemme av initialbetingelsen eller rote det til når den innsettes. ■

Oppgave 3 Finn

$$\int \frac{e^t}{e^t + 1}\, dt$$

ved en passende substitusjon.

Løsning. Vi setter $u = e^t + 1$. Dette gir $du = e^t\, dt$ og hermed

$$\int \frac{e^t}{e^t + 1}\, dt = \int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C = \underline{\underline{\ln(e^t + 1) + C}}$$

■

Kommentar. Gjennomsnittsscore er 5.28. Mange gjør riktig substitusjon regner deretter feil - men ender utrolig nok opp med rett svar! Dette gir desverre fratrekk. Oppgaven er preget av mye regnefeil av ymse slag. ■

Oppgave 4 Finn største og minste verdi av funksjonen $f(x) = (x-1)^3$ på intervallet $[0, 2]$.

Løsning. f har kritiske punkt i endepunktene 0 og 2 samt punkt inn mellom der $f'(x) = 0$. Siden $f'(x) = 3(x-1)^2$ er dette i $x = 1$. Funsjonsverdiene i disse punktene er

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1$$

Siden ekstremalverdier finnes i kritiske punkt er minimum og maksimum h.h.v. ∓ 1. ■

Kommentar. Gjennomsnittsscore er 6.47. Mange gjør seg selv den bjørnetjeneste å regne ut produktet $(x-1)^3$ i stedet for å gjøre som i løsningsforslaget. Dette fører til en del regnefeil av ymse slag. De fleste har likevel bra strategi og nesten alle har fått poeng på denne oppgaven. Fratrekk er for til tider utrolig klønete forklaringer og riktig svar men feil argumentasjon. ■

Oppgave 5 La $g(x) = x + e^x$ der $x \in \mathbb{R}$. En kan vise at g har presis ett nullpunkt som må ligge mellom -1 og 0.

a) Finn nullpunktet til g med fire desimalers nøyaktighet ved hjelp av Newtons metode med startverdi $x_0 = -1$.

b) Anta G er en funksjon med $G'(x) = g(x)$. Har G maksimum eller minimum i nullpunktet for g?

Løsning.

a) Vi bruker Newtons metode med $x_0 = -1$ og

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}.$$

Dette gir oss resultatene

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &= -0.537882843 \\ x_2 &= -0.566986991 \\ x_3 &= -0.567143286 \\ x_4 &= -0.567143290 \end{aligned}$$

Så inntil fire desimaler er $\underline{\underline{x = -0.5671}}$ nullpunktet for g.

b) g har bare ett nullpunkt og siden $g(-1) < 0$, $g(0) > 0$ og $G'(x) = g(x)$ får vi følgende fortegnstabell for G:

		-0.5671	
g	$-$	0	$+$
G	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Som viser at G har $\underline{\underline{\text{minimum}}}$ i $x = -0.5671$. ■

Kommentar.

a) Gjennomsnittsscore er 7.53. Jevnt over bra.

b) Gjennomsnittsscore er 4.68. Nesten alle finner ut at dette er et minimum. Forklaringene er dog svært varierende. Utrolig mange finner ut hva $G(x) = \frac{x^2}{2} + e^x + C$ for deretter bare å ignorere C-en - kanskje fordi den er i veien? Ganske få oppdager at det faktisk ikke er viktig hvordan G ser ut siden vi har gitt den deriverte g og det er alt vi trenger når vi skal finne ekstremalpunkter. Oppgaven er bra fordi den avslører hvem som egentlig har skjønt hva det vil si å finne ekstremalpunkt. ■

Oppgave 6 Løs vektor-ligningen:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løsning. Problemet kan løses ved rekkereduksjon:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{R3+R1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}R3,\, R1-R3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Som gir oss løsningen $\underline{\underline{x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1}}$. ■

Kommentar. Gjennomsnittsscore er 8.06 og dette var som ventet den oppgaven som opplevdes lettest for studentene. ■

Oppgave 7 La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være lineærtransformasjonen definert ved:

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

a) Finn (3×2)-matrisen for T.

b) La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$ slik at

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Regn ut $T(\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$.

Løsning.

a) Dersom e_1, e_2 er standard enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$ er matrisen for T gitt ved:

$$\begin{bmatrix} | & | \\ T(e_1) & T(e_2) \\ | & | \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

b) Vi utnytter linearitet av T og beregner:

$$T(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + 2T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

■

Kommentar. Gjennomsnittsscore var henholdsvis 4.20 og 4.84 på disse to oppgavene. Så å si alle har begge oppgavene rett, men med all all for dårlig argumentasjon og i verste fall ingen argumentasjon. Det gir desverre veldig lite poeng. Det er tankevekkende at ikke en eneste student finner det verdt bryet å nevne at T er lineær i del **b)** av oppgaven. Det er et helt helt helt vesentlig punkt i et korrekt svar. ■

Det skal svares på bare én av oppgavene 8 og 9

Oppgave 8 La $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Finn en (2×2)-matrise X som løser ligningen

$$AX = B.$$

Løsning. Én måte er å beregne A^{-1} og deretter $X = A^{-1}B$. En tilsynelatende annen og litt kortere metode er å innse at $[A|B] \sim [I|X]$. Disse metodene er essensielt fullstendig like.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R2+R1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{R1-2R2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Som gir oss svaret $\underline{\underline{X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}$.

NB: Alternativt kan en la inngangene i X, d.v.s. $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}$ være ukjente. Regner en ut matrisepruduktet AX og setter hver inngang lik den tilsvarende i B får en fire lineære ligninger i de ovennevnte variable. Dette 4×4 problem kan løses på vanlig måte. Denne metoden er kanskje lettest å forstå men er vesentlig mer arbeidskrevende. ■

Kommentar. Gjennomsnittsscore er 5.38 og oppgaven er valgt av ca 65 prosent av studentene. Mange merkelige svar og noen gode oppfinnsomme. Overraskende få går den letteste veien som beskrevet i løsningsforslaget. ■

Oppgave 9 Ta ett skritt av lengde $h = 2$ med modifisert Euler på initialverdiproblemet

$$y' = x + y, \quad y(0) = 0$$

Løsning. Først et halvt skritt med vanlig Euler:

$$k = y_0 + \frac{h}{2}(x_0 + y_0) = 0 + 1(0 + 0) = 0$$

Med dette blir det fulle skrittet med modifisert Euler:

$$y_1 = y_0 + h(x_0 + \frac{h}{2} + k) = 0 + 2(0 + 1 + 0) = 2$$

Resultat av skrittet er m.a.o. $\underline{\underline{(x_1, y_1) = (2, 2)}}$.

■

Kommentar. Gjennomsnittsscoren her er 7.33 og oppgaven er valgt av ca. 35 prosent av sudentene. Det er tydelig at veldig mange har hatt forbedret Euler skrevet opp på gularket sitt, for de fleste har skrevet den generelle formen riktig opp. For rundt halvparten går det fra mindre bra til ganske dårlig anvende den på dette problemet. ■

Generelle kommentarer

Karakterene er grovt sett delt i to grupper: Gode og dårlige. Fordelingen er 14 A'er, 10 B'er, 14 C'er, 12 D'er, 7 E'er og 22 F'er. Det tyder i mine øyne på to ting: Eksamen var relativt lett for de som har jobbet jevnt over semesteret og ganske hard mot de med huller i pensum. Det er tankevekkende at av de som ikke tok midtsemesterprøven ligger snittet på F og strykprosenten blannt disse er over 80 prosent. I tillegg er de fleste i denne gruppen, som tegner seg for over halvparten av alle stryk, veldig langt fra bestått-kravet. Det vitner om viktigheten av å jobbe jevnt gjennom semesteret. Ellers er den viktigste negative faktoren hos de fleste at der argumenteres til tider forferdelig dårlig. En bør tenke over at kunnskap er fullstendig verdiløs om en ikke evner å formidle den.

Til slut er det bare å si seg fornøyd med de gode karakterene i år. Det er flere år siden at halvparten av studentene i MA0003 har fått C eller bedre.